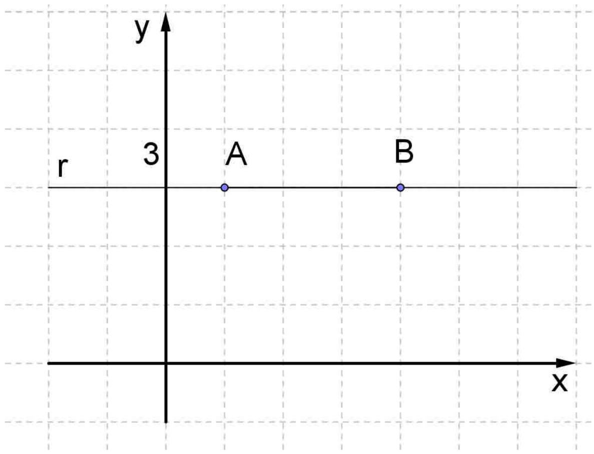
La retta nel piano cartesiano

Abbiamo visto come, fissato un sistema di riferimento, a ciascun punto sia possibile associare una coppia ordinata di numeri reali (le sue coordinate).
Se adesso consideriamo una retta come la potremo individuare?
Non possiamo dare le coordinate di tutti i suoi punti ma forse possiamo cercare una relazione che riguarda le coordinate (x,y) di un suo generico punto.

Cominciamo con il considerare una retta parallela all'asse x:osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ordinata.
Se per esempio prendiamo la retta in figura potremo scrivere

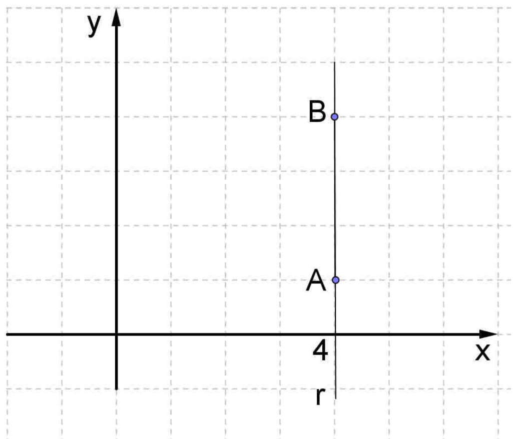
$$y = 3$$

e dire che y=3 è l'**equazione** di questa retta perché tutti i suoi punti hanno ordinata uguale a 3 e tutti i punti del piano che hanno ordinata 3 appartengono a questa retta.



Quindi, in generale, **una retta parallela all'asse x avrà equazione y=k** dove k è un numero reale.
In particolare **l'asse x avrà equazione y=0.**

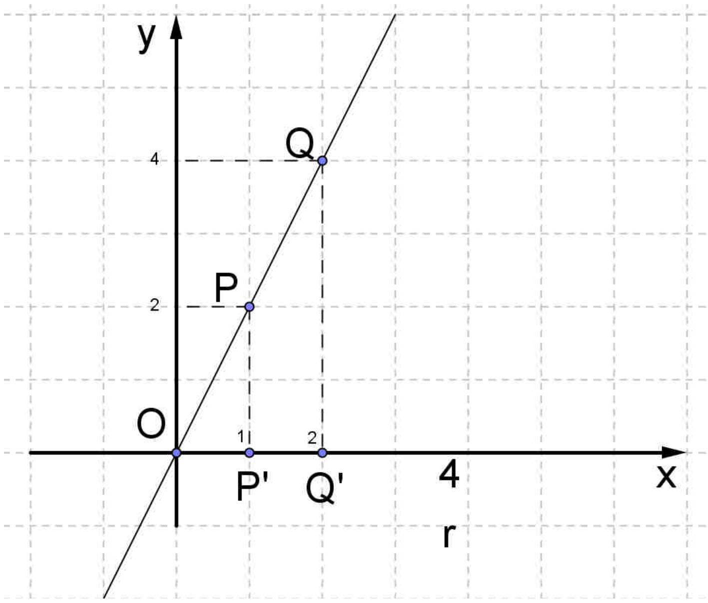
Analogamente se consideriamo una retta parallela all'assey (vedi figura) osserviamo che tutti i suoi punti hanno la stessa ascissa , nel nostro caso 4, equindi l'equazione che descrive la retta sarà x=4.
In generale **una retta parallela all'assey avrà equazione x=k** e in particolare **l'asse y avrà equazione x=0.**



Consideriamo adesso una retta passante per l'origine degli assi (vedi figura): se P e Q sono due punti appartenenti alla retta, per la similitudine dei triangoli in figura OPP' e OQQ' potremo scrivere

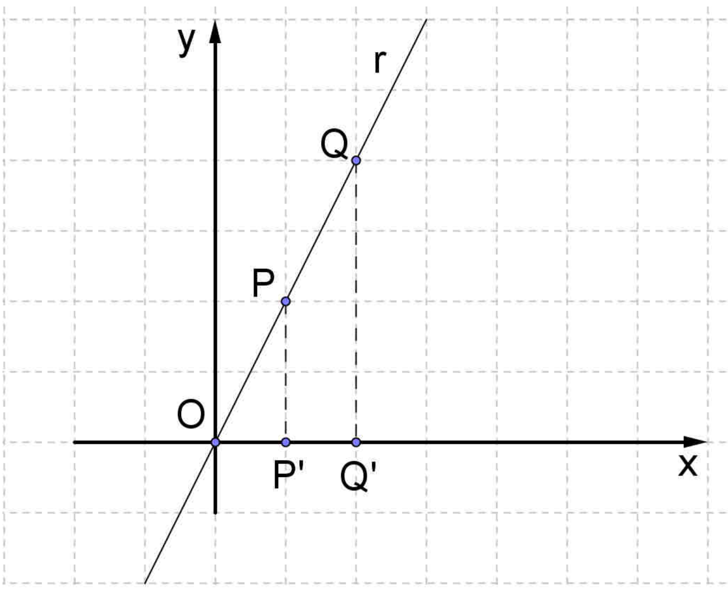
$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \quad \text{cioè} \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = 2$$

e quindi in generale potremo dire che l'equazione della retta è nel nostro esempio $\frac{y}{x} = 2$ che possiamo scrivere y=2x.



In generale per una retta passante per l'origine potremo considerare i triangoli in figura OPP' e OQQ' e potremo scrivere

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} = \text{m} \quad \text{cioè} \quad \frac{y_P}{x_P} = \frac{y_Q}{x_Q} = m$$



Quindi l'equazione di una retta per l'origine sarà :

$$\mathbf{y = mx}$$

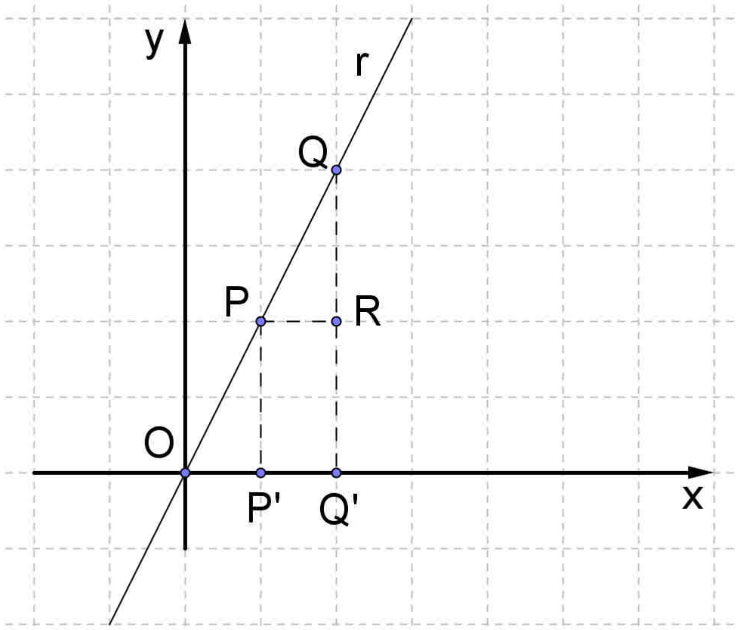
m viene detto **coefficiente angolare** della retta ed indica l'inclinazione della retta.

Osserviamo che se m>0 la retta appartiene al I –III quadrante (infatti le coordinate dei punti sono entrambe positive o negative e quindi il rapporto è un numero positivo) mentre se m<0 la retta appartiene al II- IV quadrante (le coordinate dei punti sono discordi e quindi il loro rapporto è negativo).

Osserviamo inoltre che l'asse x ha inclinazione m = 0 (l'equazione risulta infatti y = 0), ma che all'asse y non può essere associato un coefficiente angolare .

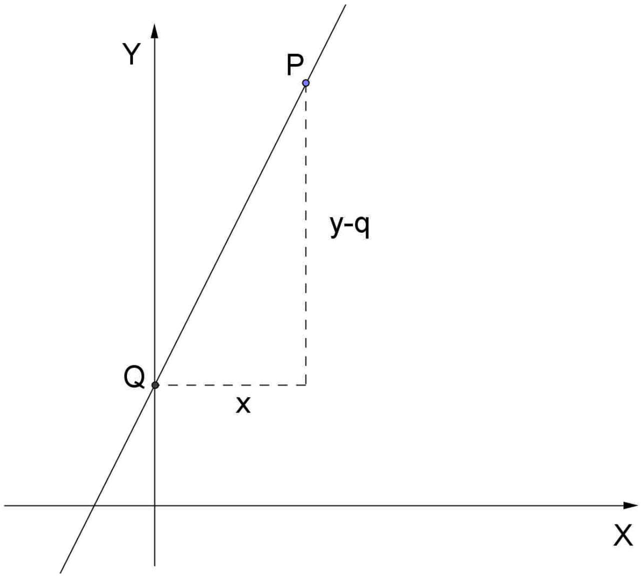
Infine facciamo notare che per trovare il coefficiente angolare posso considerare anche due punti qualsiasi P e Q appartenenti alla retta e esprimere m utilizzando il triangolo PQR (vedi figura) scrivendo

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$



Consideriamo infine una retta non passante per l'origine O(0,0) e non parallela agli assi (vedi figura).

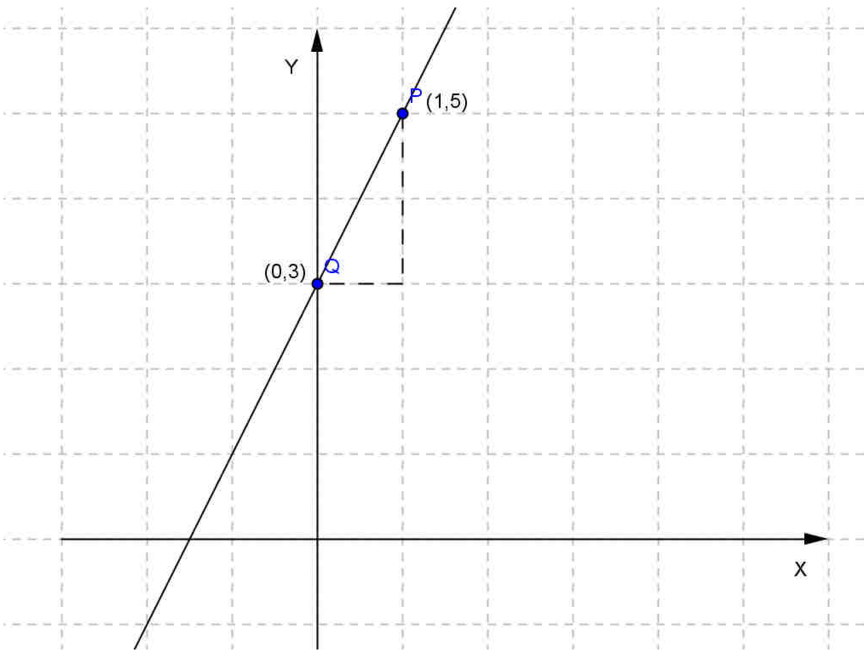
Consideriamo il punto Q(0;q) in cui interseca l'asse y ed esprimiamo il coefficiente angolare m considerando un punto generico $P(x;y)$ e il punto Q.



Abbiamo:

$$m = \frac{y-q}{x} \Rightarrow y - q = m \cdot x \Rightarrow y = m \cdot x + q$$

Nell'equazione q viene detta **ordinata all'origine** poiché corrisponde all'ordinata del punto della retta avente ascissa nulla.
In figura per esempio è stata rappresentata la retta di equazione y = 2x +3.



Problema: è possibile scrivere un'equazione che riesca a rappresentare qualsiasi retta ?

Abbiamo già fatto notare che all'asse y non poteva essere associato un coefficiente angolare e lo stesso vale per le rette parallele all'assey: l'equazione y = mx +q non riesce quindi a rappresentare tutte le rette del piano cartesiano.

Osserviamo invece la seguente equazione:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

Proviamo a far variare i parametri a, b, c:

se $a = 0$ e $b \neq 0$ possiamo ricavare $y = -\frac{c}{b}$ e quindi otteniamo le rette parallele all'assex (per c = 0 abbiamo proprio l'asse x);

se $a \neq 0$ e $b = 0$ possiamo ricavare $x = -\frac{c}{a}$ e quindi otteniamo le rette parallele all'asse y (per c = 0 abbiamo proprio l'assey);

se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ma $c = 0$ otteniamo $y = -\frac{a}{b}x$ cioè le rette per l'origine;

e infine se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$ otteniamo $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ cioè le rette del tipo y = mx +q.

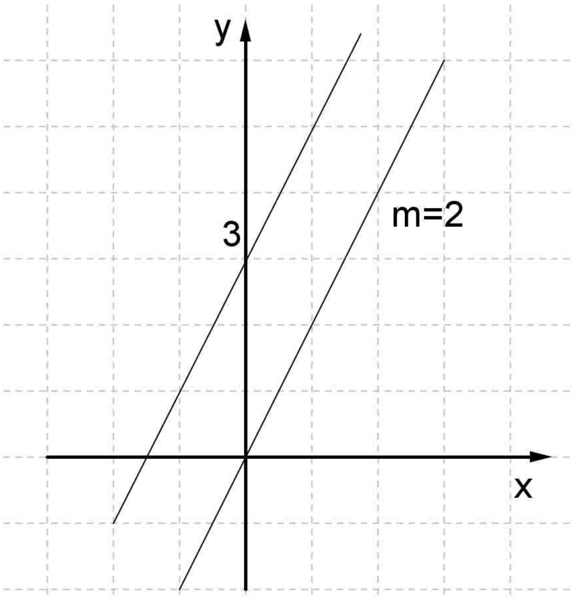
Quindi l'equazione

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

rappresenta tutte le rette nel piano cartesiano e per questo viene detta **equazione generale** di una retta.

Rette parallele

Per quello che abbiamo detto è chiaro che due rette, non parallele all'asse y, sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare.

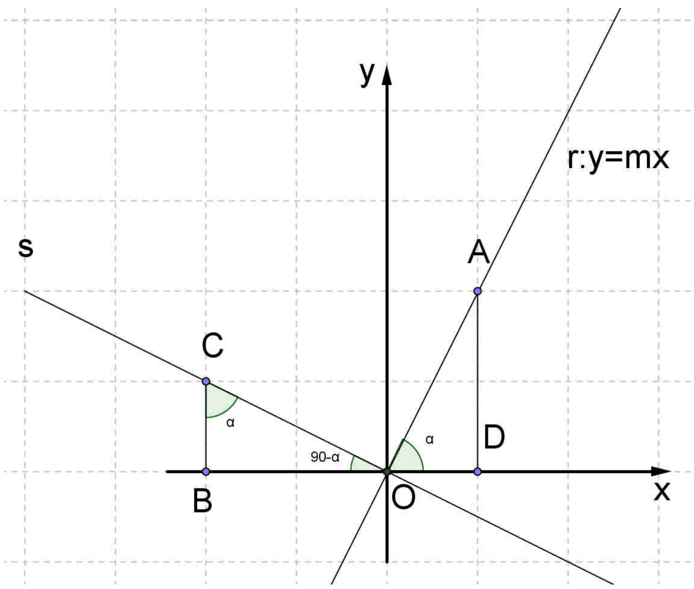


Vediamo in figura le rette di equazione $y = 2x$ e $y = 2x + 3$.

Rette perpendicolari

Consideriamo una retta per l'origine r di equazione $y = mx$ (per semplicità sia $m > 0$) e costruiamo il triangolo OAD come in figura prendendo cioè $\overline{OD} = 1$ e $\overline{AD} = m$.

A questo punto disegniamo il triangolo OCB prendendo $\overline{BC} = 1$ e $\overline{OB} = m$ (vedi figura) e tracciamo la retta s che avrà quindi equazione $y = -\frac{1}{m}x$.

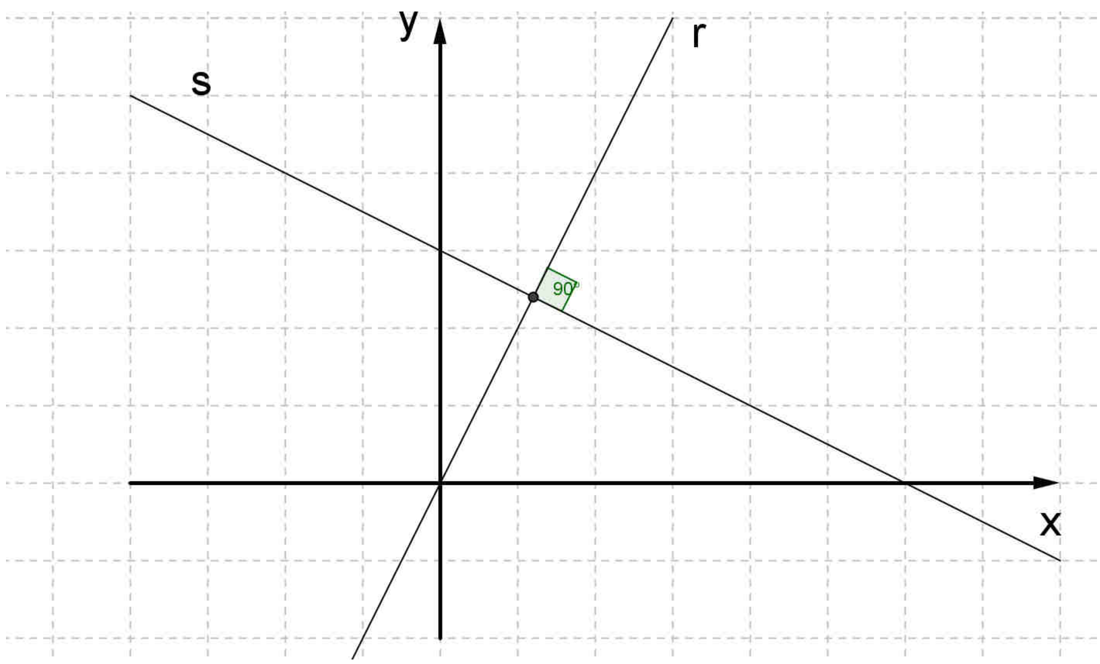


Poiché i triangoli OAD e OCB sono uguali per costruzione, avranno tutti gli angoli uguali e in particolare $A\hat{O}D = B\hat{C}O = \alpha$ e allora essendo $B\hat{O}C = 90° - \alpha$ avremo che l'angolo $A\hat{O}C = 90°$ cioè le rette r e s sono perpendicolari.

La relazione che abbiamo trovato tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari passanti per l'origine vale naturalmente anche per rette perpendicolari non passanti per l'origine poiché quello che conta è il coefficiente angolare.

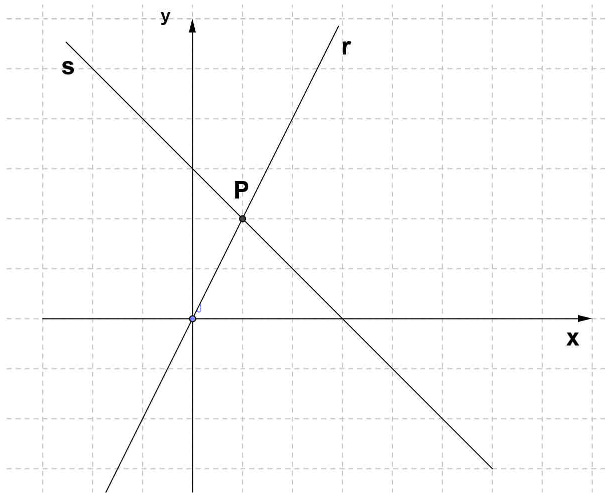
Quindi possiamo dire che se una retta ha coefficiente angolare m , una retta con coefficiente angolare $-\frac{1}{m}$ risulta ad essa perpendicolare (e viceversa se due rette sono perpendicolari e non parallele agli assi i loro coefficienti angolari sono uno l'antireciproco dell'altro).

Vediamo per esempio in figura le rette perpendicolari di equazione y = 2x e y = $-\frac{1}{2}$ x +3.



Intersezione tra due rette

Supponiamo di avere due rette non parallele, per esempio $y = 2x$ e $y = -x + 3$ come in figura e di voler trovare le coordinate del loro punto P di intersezione.



In questo caso le coordinate si possono determinare facilmente anche osservando la figura: $P(1;2)$.

Ma in generale come possiamo trovarle?

Poiché $P \in r$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di r.
Poiché $P \in s$ le sue coordinate devono verificare l'equazione di s.

Quindi le coordinate $(x; y)$ del punto di intersezione devono verificare entrambe le equazioni cioè sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Infatti risolvendo abbiamo:

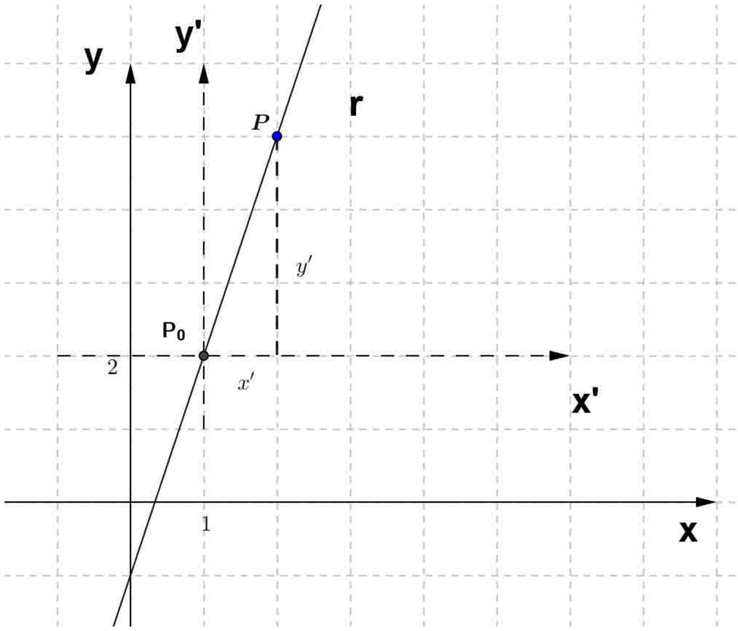
$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

In generale quindi per trovare le coordinate del punto di intersezione di due rette basterà **risolvere il sistema formato dalle loro equazioni**.

Nota: se le rette sono parallele il sistema non avrà soluzione.

Equazione di una retta passante per un punto assegnato $P_0(x_o; y_o)$ ed avente un coefficiente angolare assegnato m

Supponiamo di voler trovare l'equazione della retta passante per $P_0(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m = 3$.



Se trasliamo il sistema di riferimento portando l'origine nel punto $P_0(1;2)$ avremo che , per un punto qualunque $P(x; y)$, la relazione tra le "nuove" coordinate (x', y') riferite al sistema traslato e le "vecchie" coordinate (x, y) riferite al sistema iniziale sarà

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Ma nel nuovo sistema di riferimento sappiamo che l'equazione di r è

$$y' = 3x'$$

e quindi, tornando a x e y , otteniamo

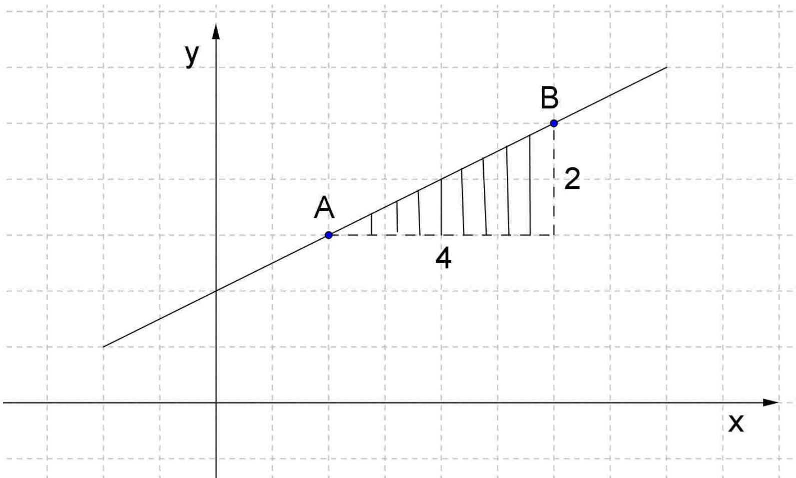
$$y - 2 = 3(x - 1)$$

In generale, quindi, la retta passante per $P_0(x_o; y_o)$ con coefficiente angolare m avrà equazione:

$$\boxed{y - y_o = m \cdot (x - x_o)}$$

Equazione della retta passante per due punti assegnati

Supponiamo di volere trovare l’equazione della retta passante per $A(2;3)$ e $B(6;5)$.



Osserviamo che possiamo ricavare il coefficiente angolare della retta partendo dal triangolo tratteggiato in figura:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e nel nostro esempio $m = \frac{1}{2}$.
A questo punto possiamo utilizzare l’equazione della retta per A, per esempio, con coefficiente angolare $m = \frac{1}{2}$: $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

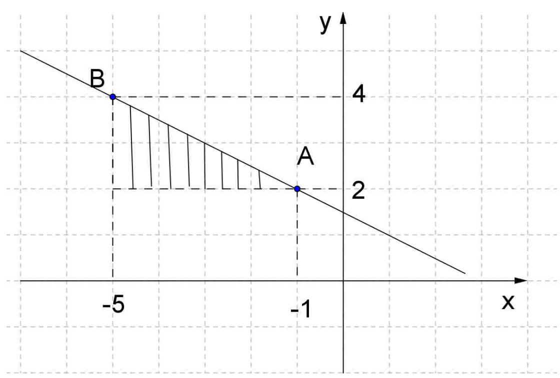
In generale l’equazione della retta passante per $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ avrà equazione:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)$$

che può essere anche scritta $\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$.

Nota: se per ricavare m ci si affida al piano quadrettato occorre fare attenzione ai coefficienti angolari negativi.
Per esempio le misure dei cateti del triangolo tratteggiato sono ancora 2 e 4 ma in questo caso è chiaro che $m = -\frac{1}{2}$.

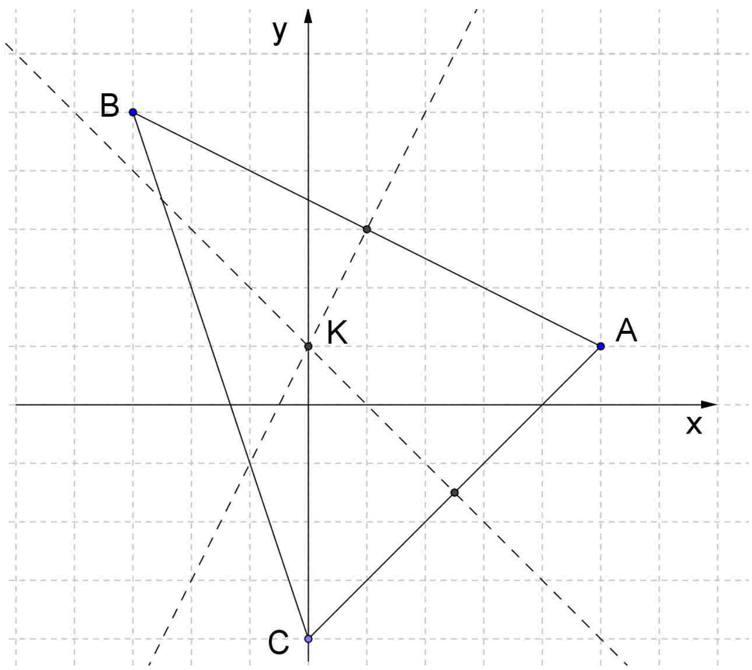
Infatti $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{-5+1} = -\frac{1}{2}$



Problema

A questo punto si possono già risolvere molti problemi collegati con la retta. Vediamone uno.

Dati tre punti $A(5;1)$ $B(-3;5)$ $C(0;-4)$ considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e determina le coordinate del circocentro K (centro della circonferenza circoscritta ≡ intersezione degli assi dei lati del triangolo) e dell'ortocentro H (intersezione delle altezze).



Ricerca del circocentro K

Dobbiamo intersecare due assi del triangolo, per esempio K $\begin{cases} asse_{AB} \\ asse_{AC} \end{cases}$

Poiché l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio, dobbiamo trovare

$M_{AB}(1;3) \qquad m_{AB} = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m_{asseAB} = 2$

$M_{AC}(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}) \qquad m_{AC} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad m_{asseAC} = -1$

Avremo quindi:

K $\begin{cases} y-3 = 2(x-1) \\ y+\frac{3}{2} = -(x-\frac{5}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = -x+1 \\ y = -x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Ricerca dell'ortocentro H

Dobbiamo intersecare due altezze, per esempio

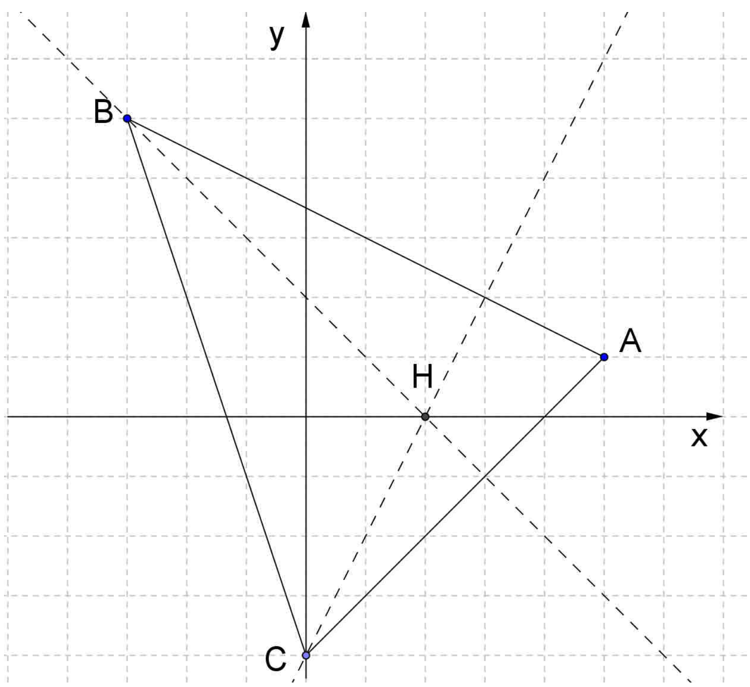
$$H \quad \begin{cases} h_B & altezza \;\; uscente \;\; da \;\; B \\ h_C & altezza \;\; uscente \;\; da \;\; C \end{cases}$$

$$h_B \;\; : \;\; m_{AC} = 1 \Rightarrow m_{hB} = -1$$

$$h_C \;\; : \;\; m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{hC} = 2$$

Quindi avremo:

$$H \;\; \begin{cases} y - 5 = -(x+3) \\ y + 4 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2 = 2x - 4 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$



Distanza di un punto P da una retta r

In molti casi è utile conoscere la distanza di un punto P da una retta r.
Potremo tracciare la retta per P perpendicolare ad r, trovare il punto H di intersezione con r e poi calcolare la distanza $\overline{HP}$. Questo procedimento risulta piuttosto lungo.
Vogliamo dimostrare che se

$$r: ax+by+c=0 \qquad P(x_o; y_o)$$

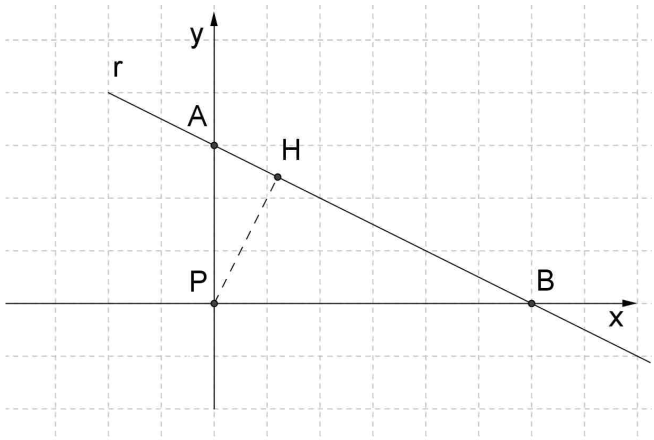
$$d(P,r)=\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1. Cominciamo con il considerare $P(0;0)$

$$r: ax+by+c=0$$

$A(0;-\frac{c}{b})$

$B(-\frac{c}{a};0)$



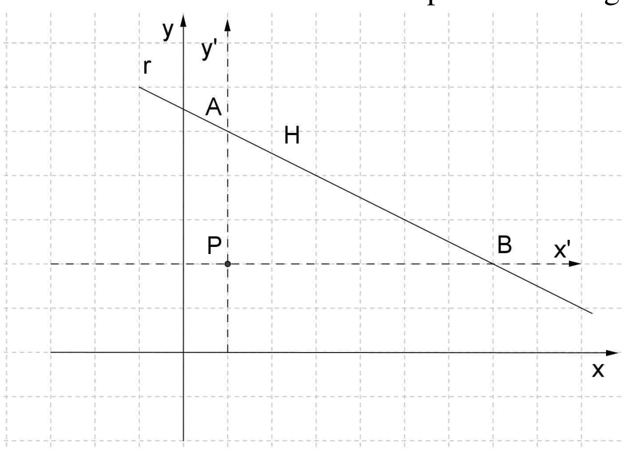
Consideriamo il triangolo $\overset{\Delta}{APB}$: $\overline{PH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa e quindi poiché

$$\overline{AB}=\sqrt{\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2b^2}}=\left|\frac{c}{ab}\right|\sqrt{a^2+b^2}$$

si ottiene

$$\overline{PH}=\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\left|\frac{c}{b}\right|\cdot\left|\frac{c}{a}\right|}{\left|\frac{c}{ab}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. Se $P \neq (0;0)$ possiamo traslare il sistema di riferimento portando l'origine in P.



Sappiamo che $\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + x_o \\ y = y' + y_o \end{cases}$

L'equazione della retta r nel nuovo sistema di riferimento sarà quindi:

$$a(x' + x_o) + b(y' + y_o) + c = 0$$

$$ax' + by' + ax_o + by_o + c = 0$$

Poiché il termine noto è $ax_o + by_o + c$ e, nel nuovo sistema di riferimento P coincide con l'origine, utilizzando la formula trovata precedentemente avremo:

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

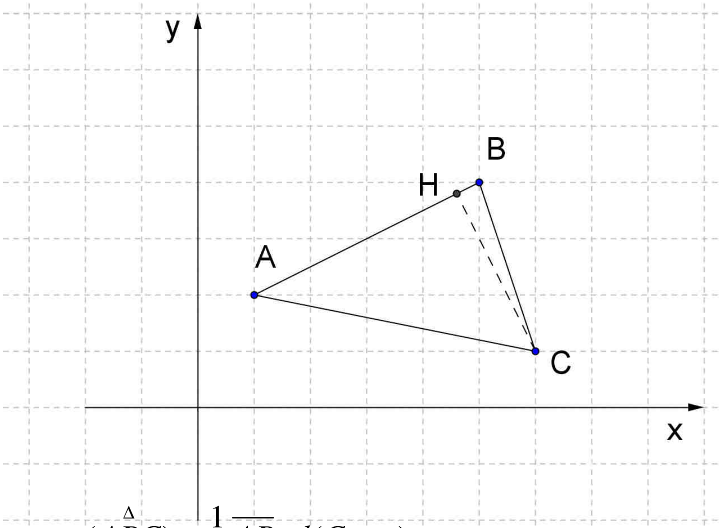
Problema: calcolo dell'area di un triangolo

Determina l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ in figura.

$A(1;2)$

$B(5;4)$

$C(6;1)$



Possiamo calcolare $area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot d(C, r_{AB})$

$\overline{AB} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

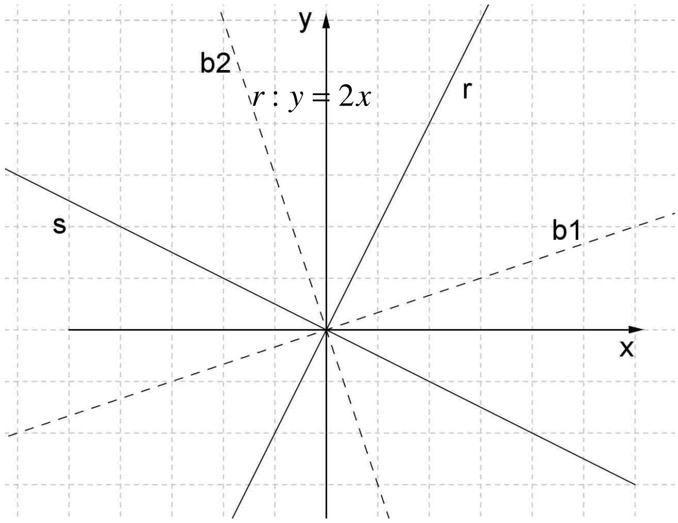
r_{AB} : $m = \frac{1}{2}$ $\quad y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$

$d(C, r_{AB}) = \frac{|6 - 2 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$

Quindi: $area(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = 7$

Equazioni delle bisettrici degli angoli individuati da due rette

Supponiamo di dover risolvere il seguente problema: date le rette di equazione $r: y = 2x$ $s: y = -\frac{1}{2}x$, determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli individuati da esse.



Ricordiamo che se $P(x;y)$ appartiene ad una bisettrice dovrà essere $d(P,r) = d(P,s)$.

Quindi , scrivendo $\begin{array}{l} r: 2x - y = 0 \\ s: x + 2y = 0 \end{array}$ dovrà essere $\frac{|2x - y|}{\sqrt{5}} = \frac{|x + 2y|}{\sqrt{5}}$

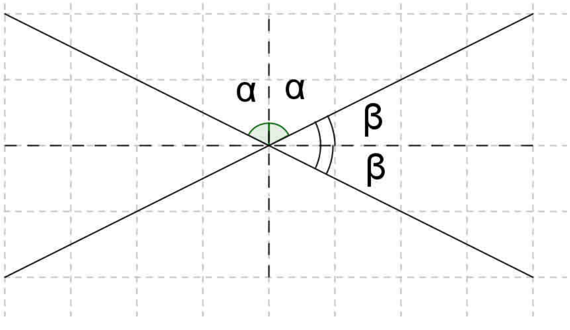
E quindi possiamo avere due casi:

$$2x - y = x + 2y \Rightarrow x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x \qquad (b_1)$$
$$2x - y = -(x + 2y) \Rightarrow 3x + y = 0 \Rightarrow y = -3x \qquad (b_2)$$

Osserviamo che le due bisettrici sono tra loro perpendicolari. Infatti osservando la figura è chiaro che

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

e quindi



$$\alpha + \beta = 90°$$

Problemi sulla retta

1. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

   a) y=3x   b) $y=-\frac{2}{3}x$ c) $y=\frac{1}{4}x$

   d) y=3x+1   e) $y=-\frac{2}{3}x+3$ f) $y=\frac{1}{4}x-2$

2. Disegna le rette aventi le seguenti equazioni:

   a) 2x+y=0   b) 3x-y=0   c) x-2y+2=0

   d) 2x-y+1=0   e) 2x-4=0   f) 5y-15=0

3. Date le rette di equazione y=2x , $y=-\frac{1}{2}x+5$, $y=\frac{1}{3}x$ determina perimetro e area del triangolo individuato dalle rette e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele.

   [$2p=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; A = 10]

4. Dati i punti A(1;3) B(3;7) C(7;-1) determina le equazioni delle rette passanti per A,B per B,C ,per A,C. Calcola il perimetro del triangolo. Determina le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

   [y=2x+1;y=-2x+13; $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$; $2p=2\sqrt{5}+2\sqrt{13}+4\sqrt{5}$; $G(\frac{11}{3};3)$; $H(0;\frac{5}{2})$]

5. Considera i punti A(2;2) B(4;6) C(8;4).Determina le equazioni delle rette dei lati e verifica che si tratta di un triangolo rettangolo isoscele. Determina perimetro e area. Determina le coordinate di baricentro, ortocentro e circocentro e verifica che sono allineati.

   [y=2x-2 ; $y=-\frac{1}{2}x+8$; $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$; $2p=4\sqrt{5}+2\sqrt{10}$; A=10 ; $G(\frac{14}{3};4)$; H(4;6); K(5;3)]

6. Considera i punti A(-3;0) B(3;2) C(5;-2). Determina le coordinate del circocentro K del triangolo ABC.

   [$K(\frac{6}{7};-\frac{11}{7})$]

7. Dati i punti A(-2;1) B(2;5) C(5;-1) determina:

   a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
   b) il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$;
   c) le coordinate del baricentro G e dell'ortocentro H del triangolo.

   [$y=x+3; y=-2x+9; y=-\frac{2}{7}x+\frac{3}{7}; 2p=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}+\sqrt{53}; A=18$; $G(\frac{5}{3};\frac{5}{3})$; $H(\frac{4}{3};\frac{8}{3})$]

8. Dati i punti A(0;1) B(2;4) C(5;2) determina:

a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
b) il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ (verifica anche che è un triangolo rettangolo);
c) le coordinate del circocentro K del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$[\ y=\frac{3}{2}x+1;\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{16}{3};\ y=\frac{1}{5}x+1; 2p=2\sqrt{13}+\sqrt{26}; A=\frac{13}{2}; K(\frac{5}{2};\frac{3}{2})\ ]$$

9. Dati i punti A(0;4) B(2;6) C(5;5) D(1;1) determina:

a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
b) verifica che ABCD è un trapezio isoscele e determina perimetro e area.

$$[\ y=x+4;\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{20}{3};\ y=x;\ y=-3x+4; 2p=2\sqrt{10}+6\sqrt{2}; A=12]$$

10. Dati i punti A(0;3) B(2;7) C(6;5) D(4;1)

a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, C e D, D e A;
b) verifica che ABCD è un quadrato e calcolane perimetro e area;
c) determina le coordinate del centro di simmetria O del quadrato ABCD.

$$[\ y=2x+3;\ y=-\frac{1}{2}x+8;\ y=2x-7;\ y=-\frac{1}{2}x+3; 2p=8\sqrt{5}; A=20; O(3;4)]$$

11. Dati i punti A(-2;3) B(1;6) C(4;0)

a) l'equazione della retta per A e B, per B e C, per A e C;
b) determina le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro H e del circocentro K del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e verifica che sono allineati.

$$[\ y=x+5;\ y=-2x+8;\ y=-\frac{1}{2}x+2 \quad G(1;3)\ \ \mathrm{H}(0;4)\ \ K(\frac{3}{2};\frac{5}{2})\ ]$$

12. Date le rette di equazione
$r: y=3x-1$
$s: x+3y-17=0$
$t: x-y-1=0$

a) determina le coordinate dei punti di intersezione $A(r,s)$ $B(s,t)$ $C(r,t)$;
b) verifica che $\overset{\Delta}{ABC}$ è un triangolo rettangolo;
c) determina il perimetro e l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

[A(2;5) B(5;4) C(0;-1) $2p=3\sqrt{10}+5\sqrt{2}; A=10$]

13. Calcola l'area del triangolo di vertici A(3;2) B(10;3) C(6;7). [A=16]

14. Calcola l'area del triangolo di vertici A(1;-2) B(3;-4) C(-1;3). [A=3]

15. Calcola l'area del triangolo di vertici A(-3;1) B(-2;-5) C(4;-1) [A=20]

16. Calcola la distanza d tra le rette di equazione y=2x e y=2x +3. [$d=\frac{3}{\sqrt{5}}$]

17. Calcola la distanza d tra le rette di equazione x-y+1=0 e x-y-4=0. [d= $\frac{5}{\sqrt{2}}$]

18. Calcola la distanza d tra le rette di equazione 2x+y=0 e 2x+y-3=0. [$d=\frac{3}{\sqrt{5}}$]

19. a) Considera i punti A(-4;1) B(1;6) C(4;-3) . Determina le equazioni delle rette r_{AB} (retta passante per i punti A e B), r_{AC} (retta passante per i punti A e C) e r_{BC} (retta passante per i punti B e C).

b) Determina perimetro e area del triangolo ABC.

c) Determina le coordinate dell'ortocentro H.

d) Determina le coordinate del circocentro K.

e) Determina le coordinate del baricentro G e verifica che H, K e G sono allineati.

$$[\, r_{AB}: y=x+5; r_{BC}: y=-3x+9; r_{AC}: x+2y+2=0$$
$$2p=5\sqrt{2}+3\sqrt{10}+4\sqrt{5}; A=30; H(-1;2); K(1;1); G(\frac{1}{3};\frac{4}{3})]$$

20. a) Considera le rette $r_1; x+2y-12=0$ $r_2: 2x+y-12=0$ e $r_3: y=-\frac{1}{2}x+3$. Disegnale e determina le coordinate di $A(r_1, assey)$ $B(r_1, r_2)$ e $C(r_2, r_3)$.

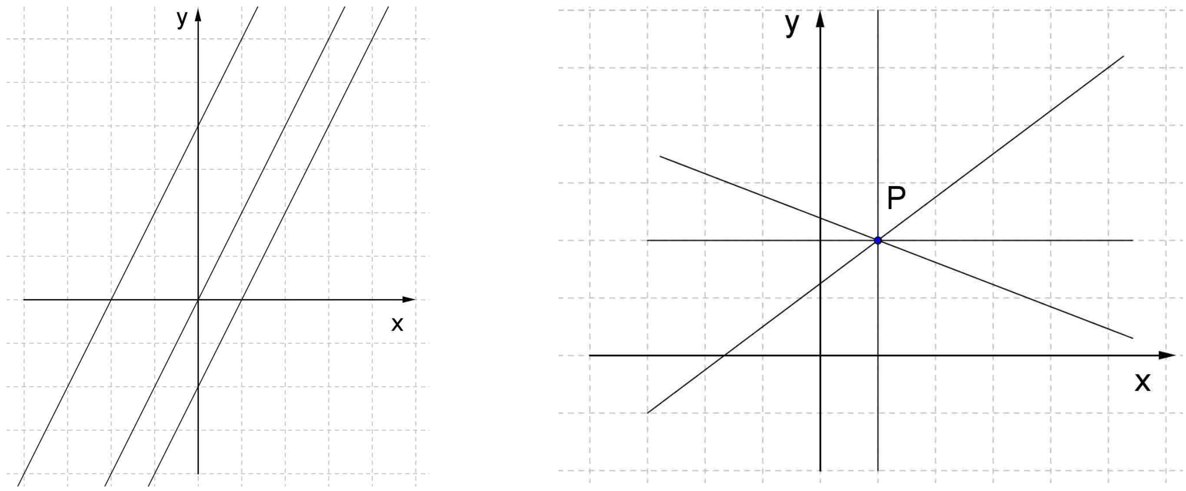
b) Determina l'equazione della retta r_4 parallela alla retta r_2 e passante per A e indica con D l'intersezione tra r_3 e r_4. Come risulta il quadrilatero ABCD ?

c) Determina perimetro e area di ABCD.

[A(0;6) B(4;4) C(6;0) $r_4: y=-2x+6$; D(2;2) ABCD è un rombo; $2p=8\sqrt{5}$ Area=12]

Fasci di rette

Per fascio di rette si intende o l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data oppure l'insieme di tutte le rette passanti per un punto dato.



Per esempio, per indicare il fascio di rette parallele alla retta $y = 2x$ scriverò:

$y = 2x + k$ (k è detto parametro)

Al variare di k (che rappresenta in questo caso l'ordinata all'origine) ottengo tutte le rette del fascio.

Per indicare, per esempio, il fascio di rette passanti per il punto P(1;2) scriverò:

$$y - 2 = k(x - 1) \quad \cup \quad x = 1$$

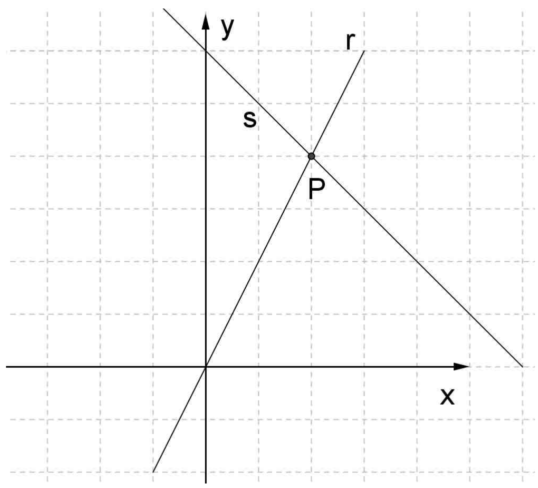
In questo caso k rappresenta il coefficiente angolare. La retta $x = 1$ deve essere indicata a parte poiché non si ottiene per nessun valore di k.

Fascio individuato da due rette "generatrici"

a) Consideriamo le due rette in figura

$r: y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$s: y = -x + 6 \Rightarrow x + y - 6 = 0$.



Per indicare il fascio di rette "**generato**" da r e s, cioè l'insieme delle rette passanti per il loro punto di intersezione P(2;4) posso scrivere così:

$$k(2x - y) + x + y - 6 = 0$$

Infatti si tratta, al variare di k, dell'equazione di una retta passante per P(2;4) poiché sostituendo x=2 y=4 si annulla sia $2x - y$ che $x + y - 6 = 0$.

Le rette r e s si chiamano "**generatrici" del fascio**.

Si osserva facilmente che se k=0 si ottiene $x + y - 6 = 0$ cioè la retta s, ma per quale valore di k otteniamo la retta r?
Proviamo per esempio ad assegnare a k il valore 1: $2x - y + x + y - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

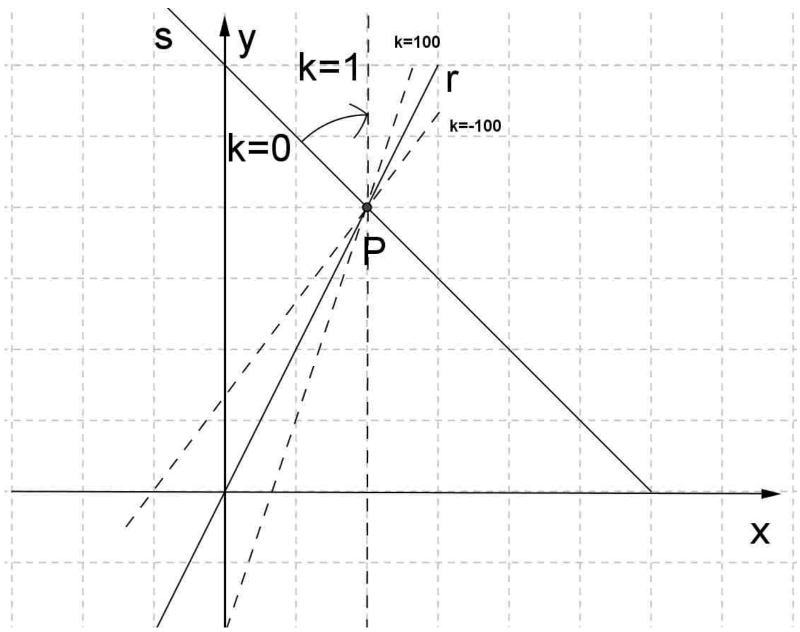
Osserviamo che se assegniamo a k un valore grande in valore assoluto, per esempio k=100 o k=-100, troviamo delle rette molto vicine a r poiché è come se il termine $(x + y - 6)$ diventasse trascurabile. Per esempio:

k=100 $\Rightarrow 201x - 99y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{201}{99}x + \frac{6}{99}$

k=-100 $\Rightarrow -199x + 101y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{199}{101}x + \frac{6}{101}$

Si stabilisce quindi di associare a r il valore "infinito" (∞) di k.

Quindi
$$k = \infty \Rightarrow 2x - y = 0$$
$$k = 0 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

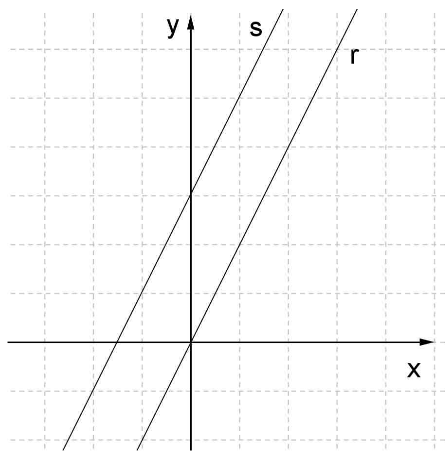


Osserviamo infine che i valori di k, nel nostro esempio, aumentano quando si ruota in senso orario: se infatti vogliamo andare dalla retta corrispondente a k=0 a quella corrispondente a k=1, senza toccare la retta $k = \infty$, dobbiamo ruotare in senso orario: quindi partendo da r e ruotando in senso orario si hanno valori da $-\infty$ a $+\infty$.

b) Consideriamo le due rette in figura:

$r : y = 2x \Rightarrow 2x - y = 0$

$s : y = 2x + 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$



Se considero l'equazione:

$$k(2x - y) + 2x - y + 3 = 0 \qquad \Rightarrow 2(k+1)x - (k+1)y + 3 = 0$$

al variare di k (con $k \neq -1$) ottengo rette parallele ad r e s.
Si tratta quindi di un fascio di rette parallele (m=2) in cui

$$k = 0 \Rightarrow s$$

$$k = \infty \Rightarrow r$$

r e s sono le "generatrici" del fascio.

Problema

Considera il fascio $k(2x-y)+x+y-6=0$.

a) Determina per quale valore di k si ottiene la retta parallela all'asse x e per quale valore di k si ottiene la retta parallela all'asse y.
Se sviluppiamo l'equazione data del fascio otteniamo $(2k+1)x+(1-k)y-6=0$.
Quindi avremo
una retta parallela all'asse x se $2k+1=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$
una retta parallela all'asse y se $1-k=0 \Rightarrow k=1$

b) Determina per quale valore di k si ottiene la retta passante per P(4;5).
Basterà sostituire le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$k(2\cdot 4-5)+4+5-6=0 \Rightarrow 3k+3=0 \Rightarrow k=-1$$

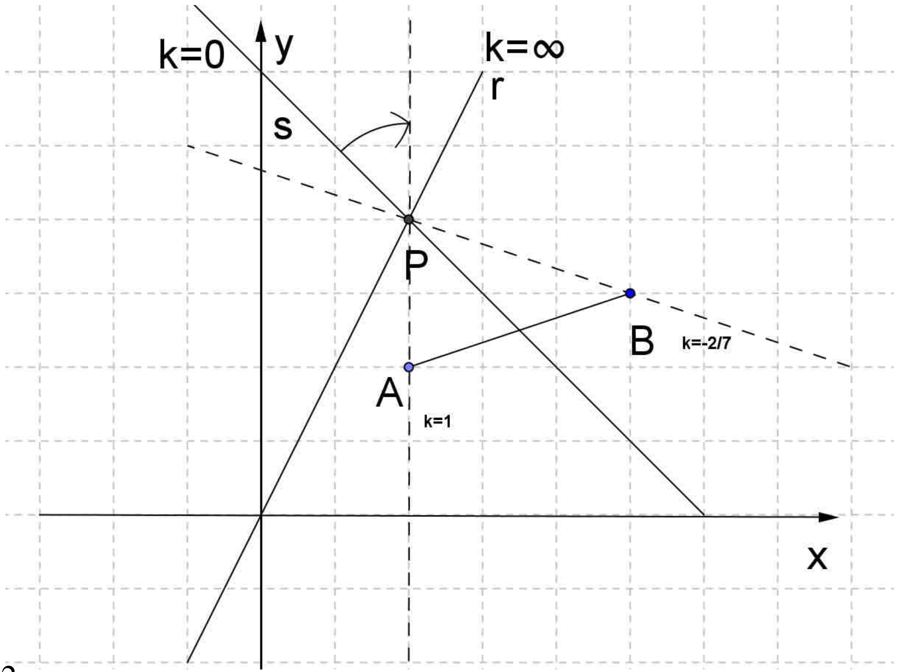
c) Determina per quale valore di k si ottiene una retta parallela alla bisettrice del I-III quadrante.
Poiché il coefficiente angolare delle rette del fascio risulta $m=\frac{2k+1}{k-1}$ dovrà essere

$$\frac{2k+1}{k-1}=1 \Rightarrow 2k+1=k-1 \Rightarrow k=-2$$

d) Determina per quali valori di k si ottengono rette che intersecano il segmento AB in figura in cui si ha A(2;2) e B(5;3).

$$k_A : k(2\cdot 2-2)+2+2-6=0 \Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$$

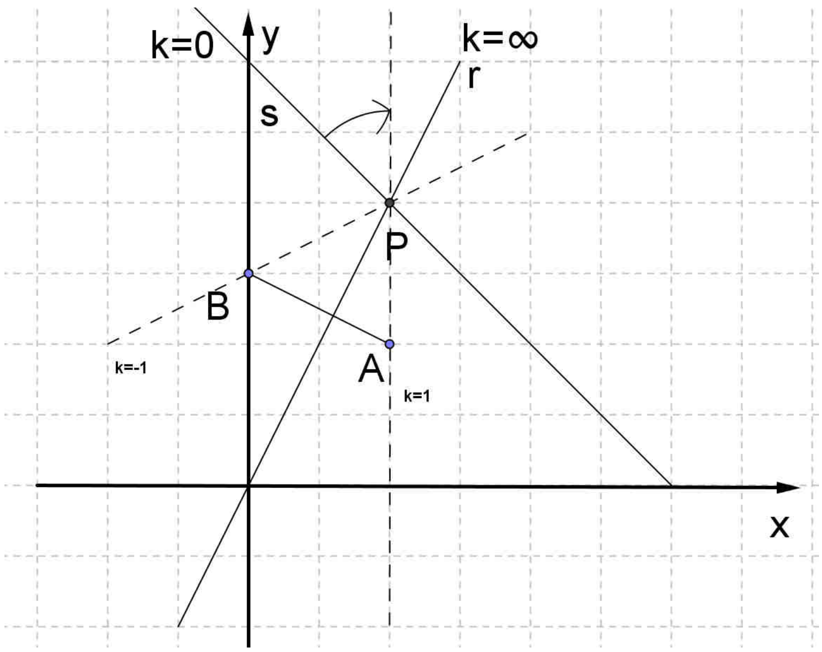
$$k_B : k(2\cdot 5-3)+5+3-6=0 \Rightarrow 7k=-2 \Rightarrow k=-\frac{2}{7}$$



Quindi se $-\frac{2}{7} \le k \le 1$ le rette intersecano il segmento.

Nota: se il segmento AB interseca la retta generatrice corrispondente a $k = \infty$ occorre fare attenzione. Consideriamo per esempio A(2;2) ma B(0;3):

$k_B : k(-3) + 3 - 6 = 0 \Rightarrow -3k = 3 \Rightarrow k = -1$



Le rette che intersecano il segmento AB si avranno, in questo caso, per $k \le -1 \cup k \ge 1$ (osserva come aumentano i valori di k).

Problemi sui fasci di rette

1. Scrivi come risultano i fasci di rette aventi le seguenti equazioni:

   a) $y = x + k$;

   b) $y = -\frac{1}{2}x + k$;

   c) $y = mx + 2$;

   d) $y - 3 = m(x - 1)$

2. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(-4;1) B(-3;-1) C(-1;3). Nel fascio di rette parallele alla retta per B e C determina quella che stacca su ABC un triangolo AB'C' tale che $area(\overset{\Delta}{AB'C'}) = \frac{1}{4} area(\overset{\Delta}{ABC})$.

   [y=2x+7]

3. Per quali valori di k le rette di equazione y=2x+k intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dell'esercizio precedente?

   [$5 \le k \le 9$]

4. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(-2;0) B(1;9) C(7;7). Determina perimetro e area. Calcola le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro H e del circocentro K. Determina l'equazione della retta parallela alla retta per B e C che stacca un triangolo AB'C' tale che $area(\overset{\Delta}{AB'C'}) = \frac{1}{4} area(\overset{\Delta}{ABC})$.

   [$2p = 5\sqrt{10} + \sqrt{130}; A = 30; G(2;\frac{16}{3}); H(1;9); K(\frac{5}{2};\frac{7}{2}); y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$]

5. Dato il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(1;3) B(3;7) C(7;-1) determina per quali valori di k le rette del fascio $y = \frac{1}{2}x + k$ intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$.

   [$-\frac{9}{2} \le k \le \frac{11}{2}$]

6. Considera il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dell'esercizio precedente: per quale valore di k la retta del fascio $y=-2x+k$ stacca un triangolo $\overset{\Delta}{AB'C'}$ di area 4?

[k=9]

7. Studia i seguenti fasci di rette ,disegna le rette generatrici ed indica con C l'eventuale centro del fascio:

a) $(k-1)x+ky+k+3=0$ [C(3;-4)]

b) $(k+1)x-(k-1)y-k-3=0$ [C(2;1)]

c) $2kx-(k+3)y-k-1=0$ [$C(\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$]

d) $(2k-1)x+ky+3=0$ [C(3;-6)]

e) $(1+k)x+(2-k)y-4-k=0$ [C(2;1)]

f) $(1-k)x+(1+k)y-2(k+2)=0$ [C(1;3)]

g) $(1+k)x-(1+k)y+2=0$ [rette parallele con m=1]

8. Studia il fascio di rette di equazione

$$(2k-1)x+ky-5=0$$

e determina:

a) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse x;

b) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse y;

c) il valore di k per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione y=x;

d) i valori di k per cui le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(1;0) e B(3;2).

[$C(-5,10); k=\frac{1}{2}; k=0; k=\frac{1}{3}; 1\le k\le 3$]

9. Studia il fascio di rette di equazione $(2+k)x+(k-1)y+3-k=0$ e determina:

a) il valore di k per cui si ha una retta parallela alla retta di equazione y=-x;

b) i valori di k per cui le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(0;0) B(2;0);

c) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse x;

d) il valore di k per cui si ha una retta parallela all'asse y.

$$[C(-\frac{2}{3};\frac{5}{3}); k=\infty; k\leq -7 \cup k\geq 3; k=-2; k=1]$$

10. Studia il fascio di rette di equazione $k(x-2y+8)+3x+y+3=0$ e determina per quali valori di k le rette del fascio intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ dove A(1;1) B(3;-2) e C(-1;-5).

$$[C(-2;3);\ -1\leq k\leq \frac{5}{17}]$$

11. Studia il fascio di rette di equazione $(x-2y)+k(2x+y+1)=0$ e determina:

a) per quali valori di k le rette del fascio intersecano il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ con A(0;0) B(2;2) C(4;-1);

b) per quale valore di k si ha una retta perpendicolare alla retta di equazione y=x.

$$[C(-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}); -\frac{3}{4}\leq k\leq \frac{2}{7}; k=-3]$$

12. Studia $F: k(x-2y+2)+3x+y-8=0$ e determina:

a) per quali valori di k le rette del fascio intersecano il segmento AB con A(4;4) e B(6;2);

b)per quale valore di k si ha una retta parallela alla retta di equazione $y=-2x$.

$$[C(2;2)\ ;\ k\leq -3\cup k\geq 4; k=-\frac{1}{5}]$$