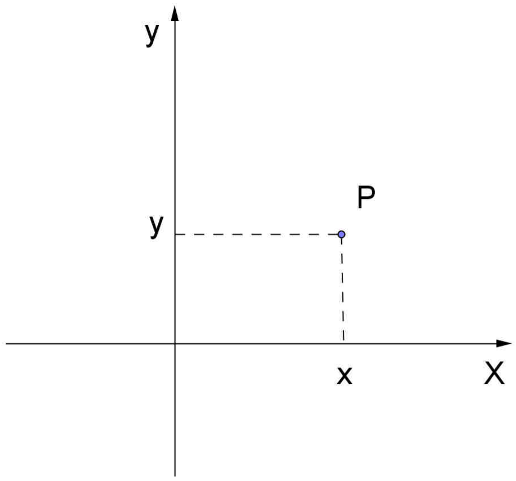
Il piano cartesiano

Sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Fissare nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale significa fissare due rette perpendicolari orientate chiamate *asse x* e *asse y*: la loro intersezione viene indicata con O e chiamata origine del sistema di riferimento.
In questo modo ad ogni punto P del piano possiamo associare una **coppia ordinata** *(x;y)* di numeri reali e viceversa ad ogni coppia ordinata *(x;y)* di numeri reali corrisponde un solo punto del piano (vedi figura).
Il numero ***x*** si chiama ***ascissa*** del punto P e il numero ***y*** si chiama ***ordinata*** del punto P.
x e *y* si dicono anche **coordinate** del punto P.



Nota

E' importante sottolineare che $(x;y)$ è una coppia "ordinata" cioè è importante l'ordine: per esempio la coppia $(4;3)$ rappresenta un punto diverso da quello associato alla coppia $(3;4)$.

Osservazione:

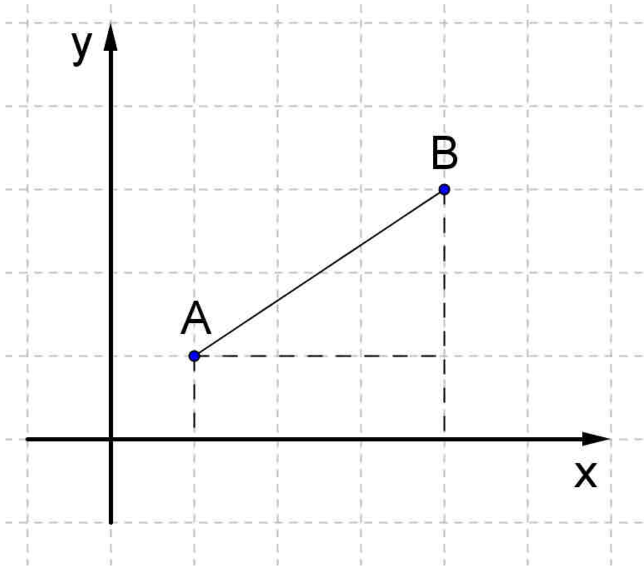
I punti sull'asse x hanno ordinata y = 0;
i punti sull'asse y hanno ascissa x = 0.

Inoltre osserviamo che i punti che si trovano nel cosiddetto I° quadrante (vedi figura) hanno ascissa e ordinata positive, quelli del II° quadrante ascissa negativa e ordinata positiva ecc.

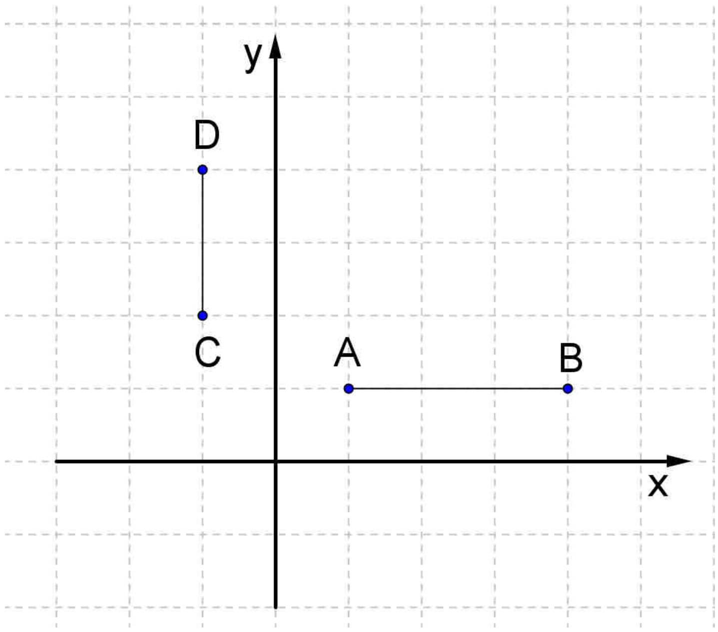
Distanza tra due punti

Per determinare la distanza tra due punti A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B) possiamo applicare il teorema di Pitagora (vedi figura):

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Se i punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata la distanza è data dal valore assoluto della differenza delle ascisse o delle ordinate : per esempio in figura $\overline{AB} = |x_B - x_A|$ e $\overline{CD} = |y_D - y_C|$.

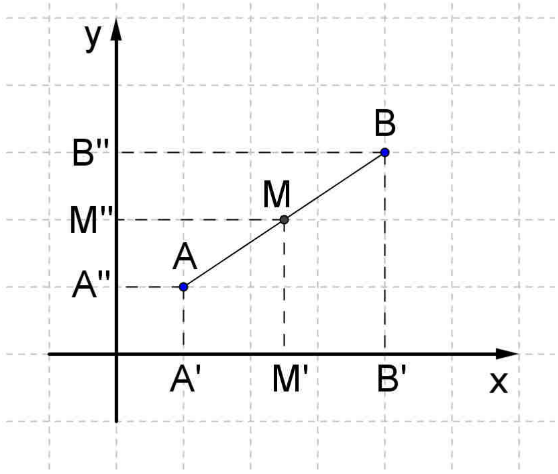


Punto medio di un segmento

Per determinare le coordinate del punto medio M di un segmento AB possiamo considerare le proiezioni di A, M e B sull'asse x e poi sull'asse y e, sfruttando il teorema di Talete, affermare che:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M - y_A = y_B - y_M \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$



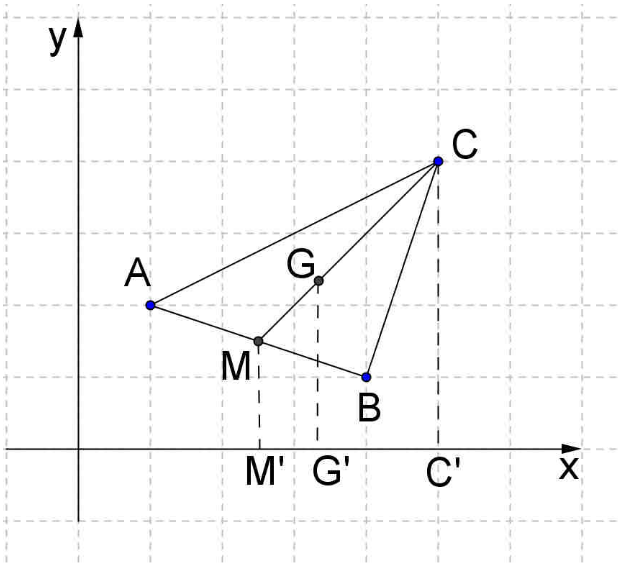
Baricentro di un triangolo

Per determinare le coordinate del baricentro G di un triangolo di vertici assegnati $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$ posiamo considerare per esempio la mediana CM (vedi figura) e ricordare che G la divide in due parti una doppia dell'altra.

Proiettando M,G,C prima sull'asse x e poi sull'asse y sempre per il teorema di Talete potremo scrivere:

$$x_C - x_G = 2(x_G - x_M) \Rightarrow x_G = \frac{2x_M + x_C}{3}$$

$$y_C - y_G = 2(y_G - y_M) \Rightarrow y_G = \frac{2y_M + y_C}{3}$$



Quindi, ricordando che

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

si ha che

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

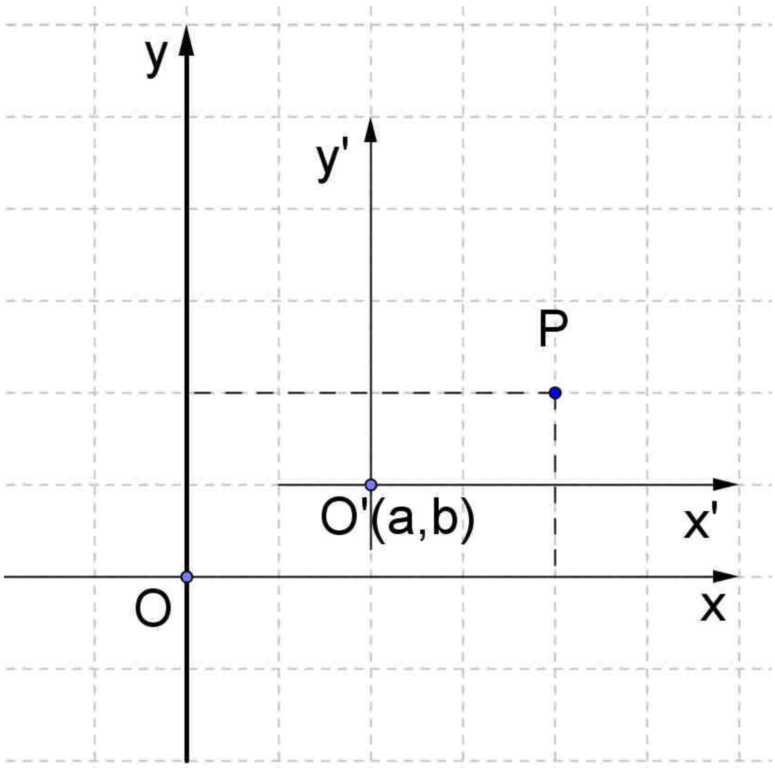
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Traslazione del sistema di riferimento

A volte può essere utile traslare il sistema di riferimento spostando l'origine in un punto O'(a,b) e chiaramente le coordinate dei punti si modificano .

Se indichiamo con (x',y') le coordinate nel nuovo sistema di riferimento avremo,come si capisce dalla figura, le seguenti relazioni tra le vecchie coordinate (x,y) e le nuove coordinate (x',y') di un punto P:

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$



Esercizi sul piano cartesiano

1. Dato il triangolo di vertici A(1,2) B(5,4) C(6,0) determina perimetro,area e coordinate del baricentro.
   (per determinare l'area puoi considerare il rettangolo in cui è inscritto il triangolo e …)

$$\left[2p = 2\sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{29}, A = 9, G(4,2)\right]$$

2. Verifica che il triangolo di vertici A(3,5) B(0,2) C(4,-2) è un triangolo rettangolo. Calcola perimetro e area.

$$\left[2p = 12\sqrt{2}, A = 12\right]$$

3. Verifica che il triangolo di vertici A(1,3) B(5,7) C(7,1) è isoscele, determina la misura dell'altezza relativa alla base, calcola perimetro, area e coordinate del baricentro G.

$$\left[2p = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{10}, A = 16, G(\frac{13}{3};\frac{11}{3})\right]$$

4. Considera il quadrilatero di vertici A(2,3) B(7,3) C(4,7) D(-1,7).Di quale quadrilatero si tratta? Determina perimetro e area.

$$\left[2p = 20, A = 20\right]$$

5. Considera il quadrilatero di vertici A(4,0) B(7,3) C(4,6) D(1,3).
   Di quale figura si tratta?

   Se il sistema di riferimento viene traslato portando l'origine nel punto di incontro delle diagonali, quali sono le nuove coordinate dei vertici della figura?