

Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado è una disequazione del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ oppure } ax^2 + bx + c < 0$$

(oppure $ax^2 + bx + c \geq 0$ o $ax^2 + bx + c \leq 0$)

I) Cominciamo considerando disequazioni in cui $a > 0$

Esempio 1 $x^2 - 4x + 3 > 0$

Consideriamo l'equazione di secondo grado corrispondente (detta equazione "associata"):

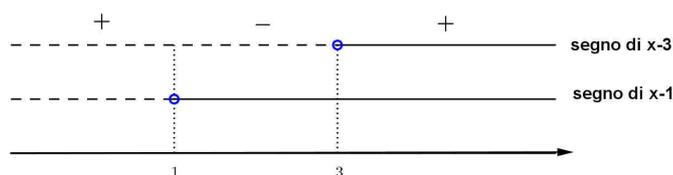
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x_{1,2} = 2 \pm 1 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

Quindi, ricordando che se $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni x_1, x_2 allora $ax^2 + bx + c$ si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$, abbiamo $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ e per determinare il segno di $x^2 - 4x + 3$ possiamo studiare il segno di $(x - 1)$ ed il segno di $(x - 3)$.

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

Rappresentiamo la situazione con il cosiddetto "grafico dei segni" in cui indichiamo con una **linea continua il segno positivo** e con una **linea tratteggiata il segno negativo**.

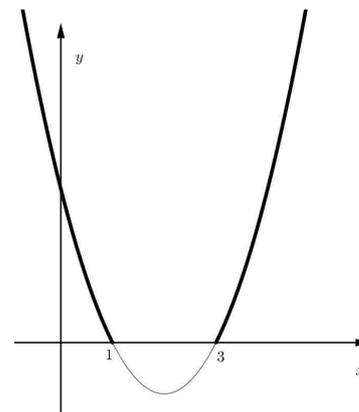


Allora per la regola dei segni del prodotto avremo $x^2 - 4x + 3 > 0 \rightarrow x < 1 \cup x > 3$
(valori esterni alle soluzioni dell'equazione associata)

Interpretazione grafica

Possiamo disegnare la parabola "associata" alla disequazione, cioè la parabola $y = x^2 - 4x + 3$: il vertice risulta $V(2; -1)$ e naturalmente le intersezioni con l'asse x si ottengono dalle soluzioni dell'equazione precedente e sono $(1; 0)$, $(3; 0)$. Quindi risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 3 > 0$ equivale a individuare **la zona della parabola che si trova al di sopra dell'asse x** ed infatti osservando il grafico abbiamo che:

$$y > 0 \rightarrow x < 1 \cup x > 3$$



Esempio 2 $x^2 + 2x + 1 > 0$

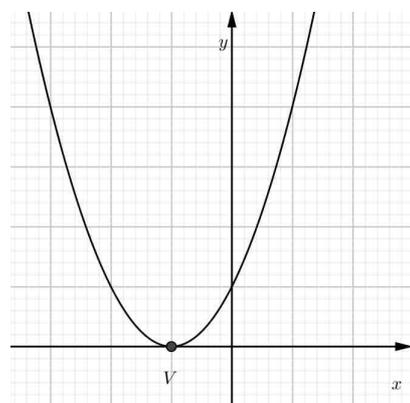
In questo caso l'equazione associata ha $\Delta = 0$ ed infatti si tratta del quadrato di un binomio:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

È chiaro quindi che la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ eccetto $x = -1$ in cui il trinomio si annulla e quindi scriveremo $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$.

Graficamente osserviamo che la parabola $y = x^2 + 2x + 1$, rivolta verso l'alto, è tangente all'asse delle x nel suo vertice $(-1; 0)$ e quindi

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$



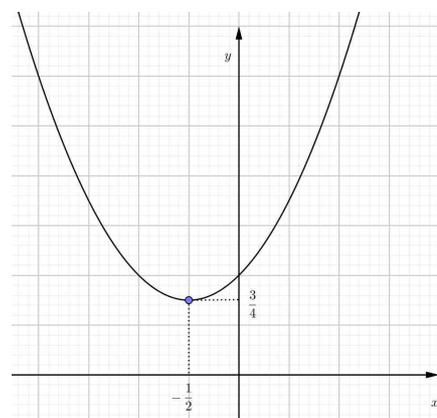
Esempio 3 $x^2 + x + 1 > 0$

Considerando l'equazione associata $x^2 + x + 1 = 0$: in questo caso abbiamo $\Delta = 1 - 4 < 0$ e quindi non ci sono soluzioni reali.

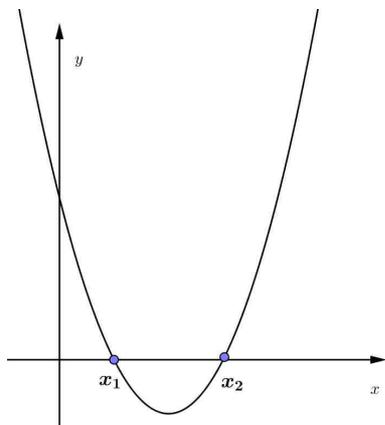
Graficamente abbiamo la parabola $y = x^2 + x + 1$ che ha

vertice $V\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ ed è rivolta verso l'alto: si ha perciò

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



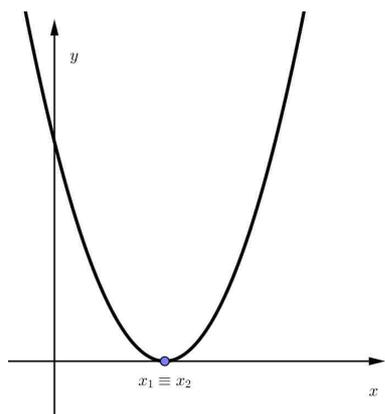
Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $a > 0$
 (parabola rivolta verso l'alto)



$\Delta > 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$ (valori esterni) $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow x_1 < x < x_2$ (valori interni)

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x \leq x_1 \cup x \geq x_2)$

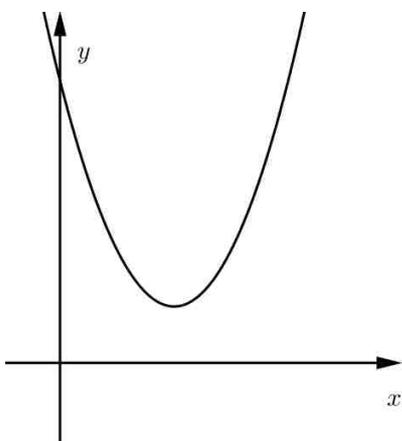
$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x_1 \leq x \leq x_2)$



$\Delta = 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}, x \neq x_1$ $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione reale

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R})$

$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x = x_1)$



$\Delta < 0$ $ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$ $ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow$ nessuna soluzione reale

$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \forall x \in \mathfrak{R})$

$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow$ nessuna soluzione reale)

II) Consideriamo adesso disequazioni in cui $a < 0$

Esempio 1 $-x^2 + 2x > 0$

Per risolvere l'equazione associata $-x^2 + 2x = 0$ mettiamo in evidenza la x :

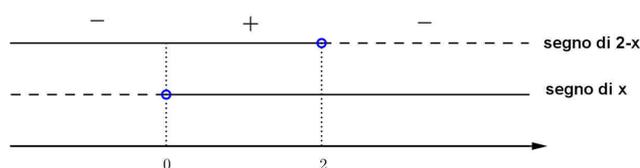
$$-x^2 + 2x = x(-x + 2)$$

quindi $-x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0 \cup x = 2$.

Per determinare il segno di $-x^2 + 2x$ studiamo il segno di x e di $2 - x$:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ 2 - x &> 0 \rightarrow x < 2 \end{aligned}$$

Il grafico dei segni è:



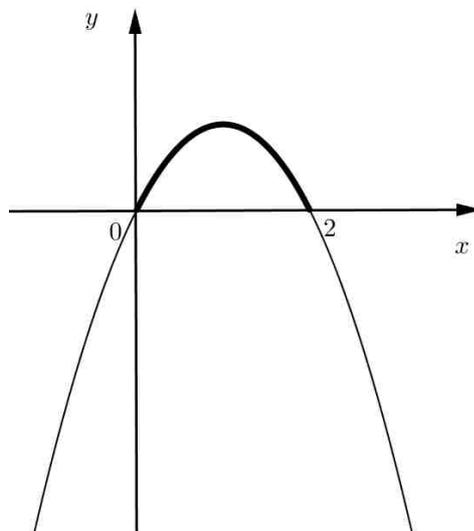
Quindi $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow 0 < x < 2$

(valori interni alle soluzioni dell'equazione associata)

Interpretazione grafica

Disegniamo la parabola $y = -x^2 + 2x$: questa volta la **parabola è rivolta verso il basso** e quindi

$$y > 0 \rightarrow 0 < x < 2$$

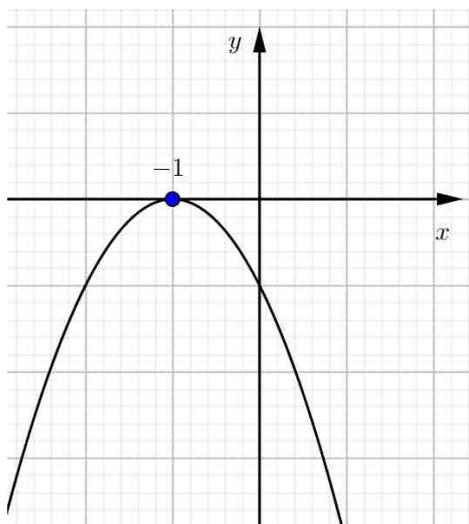


Esempio 2 $-x^2 - 2x - 1 > 0$

In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta = 0$.

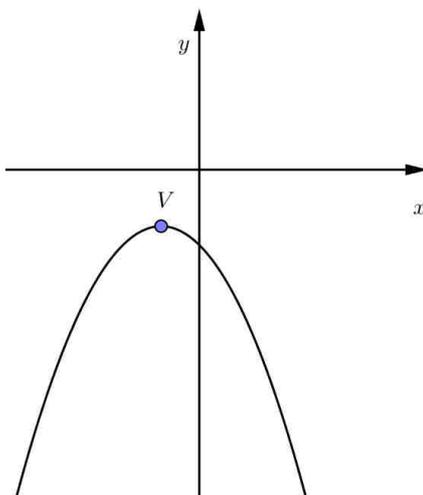
Infatti $-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x+1)^2$

Quindi la disequazione non ha **nessuna soluzione** ed infatti la parabola è rivolta verso il basso ed ha vertice in $(-1;0)$.

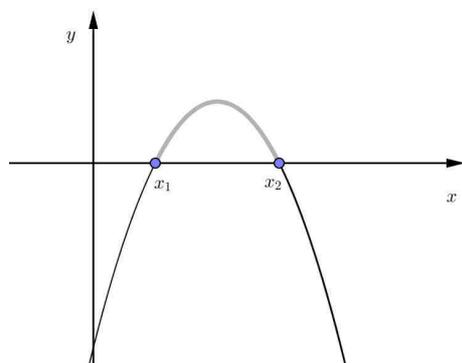


Esempio 3 $-x^2 - x - 1 > 0$

In questo caso abbiamo che l'equazione associata ha $\Delta < 0$ e quindi non ci sono soluzioni reali: quindi la parabola associata, che è rivolta verso il basso ed ha vertice $V\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, non interseca l'asse x e **la disequazione non ha nessuna soluzione**.



Riassumiamo le soluzioni delle disequazioni in cui $a < 0$
(parabola rivolta verso il basso)



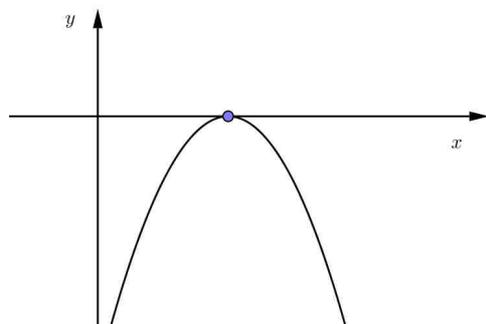
$$\Delta > 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow x_1 < x < x_2$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow x < x_1 \cup x > x_2$$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x_1 \leq x \leq x_2)$$

$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow x \leq x_1 \cup x \geq x_2)$$



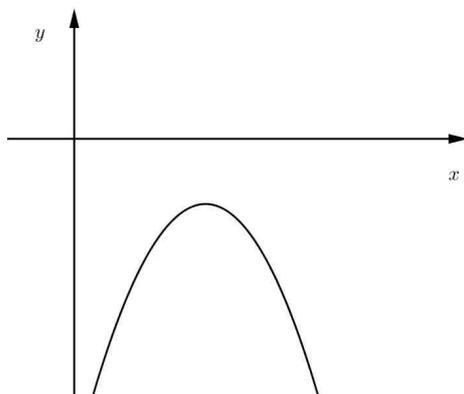
$$\Delta = 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq x_1$$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow x = x_1)$$

$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R})$$



$$\Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(ax^2 + bx + c \geq 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale})$$

$$(ax^2 + bx + c \leq 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R})$$

Nota importante

Quando in una disequazione si ha $a < 0$ conviene moltiplicare per -1 ed invertire la diseuguaglianza riconducendosi al caso di $a > 0$.

In questo modo possiamo fare riferimento sempre al caso della parabola rivolta verso l'alto.

Vediamo come si poteva procedere nel caso degli ultimi tre esempi:

1) $-x^2 + 2x > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2$

2) $-x^2 - 2x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 < 0 \rightarrow (x+1)^2 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale};$

3) $-x^2 - x - 1 > 0 \rightarrow x^2 + x + 1 < 0 \rightarrow \text{nessuna soluzione reale}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Esempio 1

Consideriamo la disequazione $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

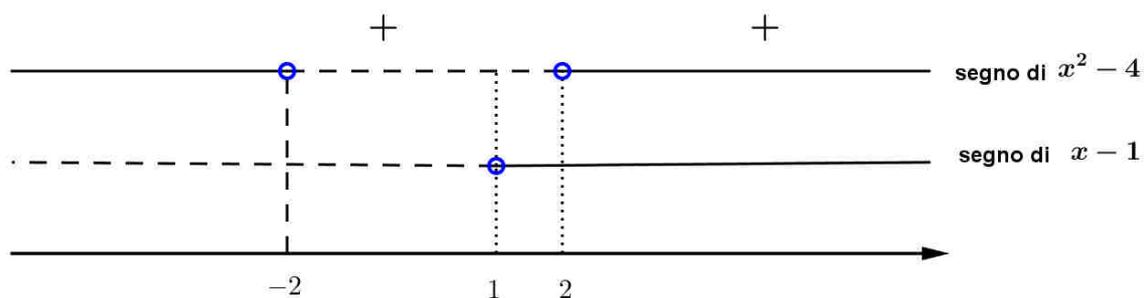
Proviamo a scomporre il polinomio (raccoglimento parziale):

$$x^2(x-1) - 4(x-1) > 0 \rightarrow (x-1)(x^2 - 4) > 0$$

Possiamo quindi studiare il segno dei singoli fattori

$$\begin{aligned} x-1 > 0 &\rightarrow x > 1 \\ x^2 - 4 > 0 &\rightarrow x < -2 \cup x > 2 \end{aligned}$$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Abbiamo quindi $(x-1)(x^2-4) > 0$ per $-2 < x < 1 \cup x > 2$.

Esempio 2

Consideriamo la disequazione $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$

Scomponiamo utilizzando la regola di Ruffini:

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 0$$

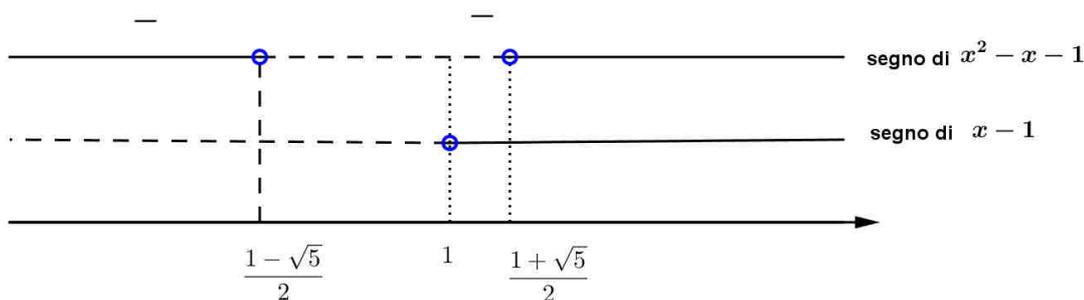
$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 2x^2 & +1 \\
 \hline
 -x^3 & x-1 \\
 \hline
 -x^2 & \\
 +x^2 & -x \\
 \hline
 & -x +1 \\
 & \hline
 & +x -1 \\
 & \hline
 & // \quad //
 \end{array}$$

Quindi $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$

Studiamo il segno dei singoli fattori (si imposta sempre il fattore >0)

$$\begin{aligned}
 x-1 > 0 &\rightarrow x > 1 \\
 x^2 - x - 1 > 0 &\rightarrow (x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}) \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

Riportiamo questi risultati nel “grafico dei segni”:



Poiché la disequazione è $x^3 - 2x^2 + 1 < 0$, la soluzione è

$$x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cup 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} .$$

Esempio 3

Consideriamo la disequazione $x^3 - 1 > 0$

Sappiamo che possiamo scomporre il polinomio dato come differenza di cubi per cui

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Studiamo il segno dei singoli fattori

$$\begin{aligned} x-1 > 0 &\rightarrow x > 1 \\ x^2 + x + 1 > 0 \quad (a > 0, \Delta < 0) &\rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Quindi $x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$

Osservazione

Quando in un prodotto un fattore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, possiamo anche non considerarlo perché non fa cambiare il segno del prodotto.

Esempio 4

Consideriamo la disequazione $x^3 + 2x^2 \leq 0$

Basta mettere in evidenza:

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) \leq 0$$

Poiché $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ possiamo anche non considerarlo e studiare solo il segno di $(x+2)$:

$$x^2(x+2) \leq 0 \rightarrow (x+2) \leq 0 \rightarrow x+2 \leq 0 \rightarrow x \leq -2$$

Disequazioni fratte

Esempio

Risolviamo la seguente disequazione fratta:

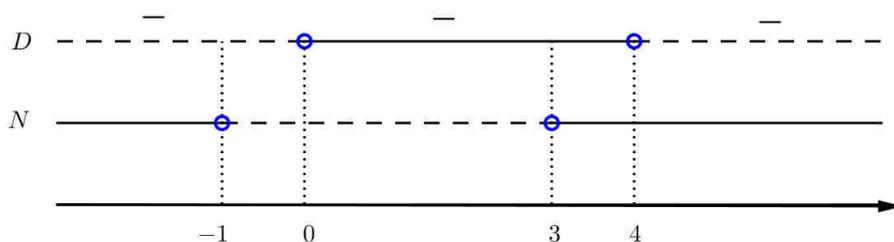
$$\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore:

$$N > 0 \quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad (x_{1,2} = 1 \pm 2) \rightarrow x < -1 \cup x > 3$$

$$D > 0 \quad 4x - x^2 > 0 \rightarrow x(4 - x) > 0, \quad (x_1 = 0, x_2 = 4) \rightarrow 0 < x < 4$$

Grafico dei segni:



Poiché dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} < 0$ la soluzione sarà: $x < -1 \cup 0 < x < 3 \cup x > 4$.

NOTA 1

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} \leq 0$, dobbiamo considerare tra le soluzioni anche $x = -1$ e $x = 3$, ma non $x = 0$ e $x = 4$ perché per quei valori il denominatore si annulla (C.E. della frazione algebrica: $x \neq 0, x \neq 4$).

La soluzione risulta quindi:

$$x \leq -1 \cup 0 < x \leq 3 \cup x > 4$$

NOTA 2

Se dobbiamo risolvere $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$, il procedimento sarebbe stato lo stesso solo che alla fine, dal grafico dei segni, avremmo considerato i valori di x che danno segno complessivo positivo.

La soluzione di $\frac{x^2 - 2x + 3}{4x - x^2} > 0$ risulta quindi:

$$-1 < x < 0 \cup 3 < x < 4$$

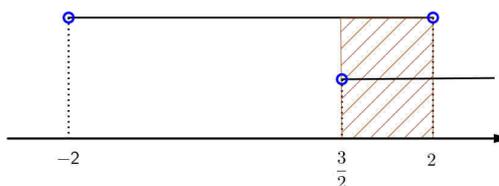
Sistemi di disequazioni

Esempio 1

Risolviamo il sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere ciascuna disequazione del sistema ed intersecare le soluzioni per ottenere le soluzioni “comuni”.

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2} \\ x^2 - 4 < 0 \rightarrow -2 < x < 2 \end{cases}$$



quindi la soluzione del sistema è $\frac{3}{2} < x < 2$.

NOTA IMPORTANTE

Quando si intersecano le soluzioni delle disequazioni **non si deve mai aggiungere il tratteggio!**

Il tratteggio indica “segno negativo” nel grafico dei segni ma in questo caso **non stiamo facendo un grafico dei segni!**

Esempio 2

Risolviamo il sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 4} > 0 \end{cases}$$

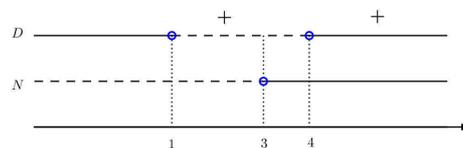
Per la prima disequazione abbiamo $x(x - 2) < 0$, quindi $0 < x < 2$

Per la seconda disequazione dobbiamo studiare i segni di numeratore e denominatore:

$$N > 0 \quad x - 3 > 0 \rightarrow x > 3$$

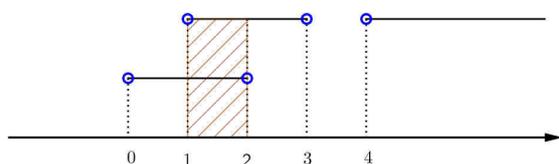
$$D > 0$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \quad (x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4) \rightarrow x < 1 \cup x > 4$$



Quindi la soluzione della seconda disequazione è: $1 < x < 3 \cup x > 4$.

A questo punto dobbiamo intersecare le soluzioni della prima e della seconda disequazione. Le soluzioni comuni sono:



Perciò la soluzione del sistema è: $1 < x < 2$.

Esempio 3

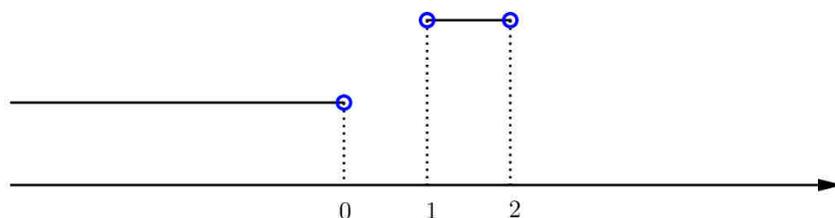
Risolvi il sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} < 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

Prima disequazione: $\frac{x^2 + 1}{x} < 0$

Osservo che $x^2 + 1 > 0 \forall x \in R$ e quindi la disequazione ha come soluzione $x < 0$.

Seconda disequazione: $x^2 - 3x + 2 < 0$ ($x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$) $\rightarrow 1 < x < 2$.

Grafico per individuare le soluzioni “comuni”

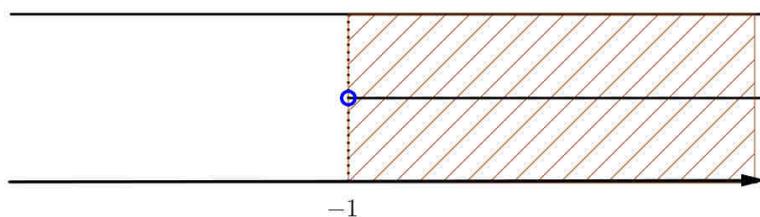


Quindi non ci sono soluzioni comuni: $S = \emptyset$ (l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto) per cui il sistema è “impossibile”.

Esempio 4

Risolvi il sistema di disequazioni:
$$\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + 1 > 0 \rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) > 0 \rightarrow x > -1 & (x^2 - x + 1 \text{ è sempre positivo}) \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \rightarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in R \end{cases}$$



Pertanto la soluzione è $x > -1$.

Esercizi

I) Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

- 1) $x^2 + 3x + 2 > 0$ [$x < -2 \cup x > -1$]
- 2) $x^2 + x - 6 > 0$ [$x < -3 \cup x > 2$]
- 3) $x^2 - 2x + 10 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R}$]
- 4) $x^2 - 2x - 8 > 0$ [$x < -2 \cup x > 4$]
- 5) $x^2 + 4x + 5 < 0$ [nessuna soluzione reale]
- 6) $-x^2 + 3x - 2 > 0$ [$1 < x < 2$]
- 7) $x(x+3) \leq -2x$ [$-5 \leq x \leq 0$]
- 8) $-x^2 + 9 \leq 0$ [$x \leq -3 \cup x \geq 3$]
- 9) $x^2 + 10x + 34 < 0$ [nessuna soluzione reale]
- 10) $-x(x-4) < 3$ [$x < 1 \cup x > 3$]
- 11) $9x^2 + 4 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R}$]
- 12) $81x^2 + 18x + 1 \leq 0$ [$x = -\frac{1}{9}$]
- 13) $-x^2 - 6x - 8 \geq 0$ [$-4 \leq x \leq -2$]
- 14) $6x^2 + x - 1 < 0$ [$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$]
- 15) $x^2 - 8x + 20 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R}$]
- 16) $\frac{1}{2}(x-1) \leq x^2 - x$ [$x \leq \frac{1}{2} \cup x \geq 1$]
- 17) $9x^2 - 30x + 25 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3} \right\}$]
- 18) $-x^2 - 3 \geq 0$ [nessuna soluzione reale]

Appunti di Matematica 2
- Disequazioni di secondo grado -

- 19) $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{15}{8} > 0$ $\left[x < -\frac{3}{4} \cup x > \frac{5}{2} \right]$
- 20) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 < 0$ $\left[\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \right]$
- 21) $x^2 - 6x + 1 > 0$ $[x < 3 - 2\sqrt{2} \cup x > 3 + 2\sqrt{2}]$
- 22) $3x^2 + 8x - 3 < 0$ $\left[-3 < x < \frac{1}{3} \right]$
- 23) $2x^2 - 4x - 1 > 0$ $\left[x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \cup x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \right]$
- 24) $x^2 + 3x + 8 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$
- 25) $-x^2 + 3x - 10 > 0$ $[nessuna\ soluzione\ reale]$
- 26) $-x^2 + 2x + 4 > 0$ $[1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}]$
- 27) $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 3]$
- 28) $x^2 - 6x + 12 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$
- 29) $7x^2 - 12x - 4 > 0$ $\left[x < -\frac{2}{7} \cup x > 2 \right]$
- 30) $-12x^2 + 4x + 1 < 0$ $\left[x < -\frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2} \right]$
- 31) $4x^2 - 3x + 1 < 0$ $[nessuna\ soluzione\ reale]$
- 32) $3x^2 + x + 2 < 0$ $[nessuna\ soluzione\ reale]$
- 33) $x^2 - 6x + 9 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}]$
- 34) $-2x^2 + x + 1 > 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1 \right]$
- 35) $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{5} \cup x \geq 1 \right]$
- 36) $9x^2 + 12x + 4 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$
- 37) $8x^2 - 24x + 18 \leq 0$ $\left[x = \frac{3}{2} \right]$

Appunti di Matematica 2
- Disequazioni di secondo grado -

$$38) -27x^2 + 18x - 3 \geq 0 \quad \left[x = \frac{1}{3} \right]$$

$$39) x^2 - 2x < 0 \quad [0 < x < 2]$$

$$40) 1 - x^2 \geq 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad [-2 \leq x \leq 0]$$

$$41) \frac{13 + 9x^2}{9} - \frac{2x - 1}{2} - \frac{1}{3}(4x + 1) > 0 \quad [\forall x \in \mathbb{R}]$$

$$42) -6x + \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\frac{1}{2} + x \right) - 9(-1)^2 < 0 \quad \left[x < -\frac{7}{2} \cup x > -\frac{5}{2} \right]$$

$$43) \frac{1 - x + x^2}{2} + \frac{x(3x + 16)}{8} - \frac{3x^2 + 2}{4} \leq x^2 + \frac{5x - 4}{3} \quad \left[x \leq -\frac{4}{3} \cup x \geq \frac{8}{7} \right]$$

$$44) \left(\frac{1}{3} + x \right)^2 - \frac{1}{3} \geq x - \frac{1}{4} \quad [\forall x \in \mathbb{R}]$$

$$45) \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right) \quad \left[x \leq -1 \cup x \geq \frac{1}{2} \right]$$

$$46) \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \leq x - \frac{1}{4} \quad \left[x = \frac{5}{6} \right]$$

$$47) \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right) > \frac{x}{12} (\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1) \quad \left[x < -\frac{1}{3} \cup x > \frac{3}{4} \right]$$

$$48) x^2 \geq \frac{1}{2}(x + 1) \quad \left[x < -\frac{1}{2} \cup x > 1 \right]$$

$$49) \frac{1}{2}x \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2}x^2 \right) + x - \frac{1}{6} < \frac{5}{6}x \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

$$50) (x + 1)^2 + \left(-\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{2}(x + 1) \leq 0 \quad \left[x = -\frac{3}{4} \right]$$

$$51) 2 \left(5 - \frac{13}{8}x \right) > (x + 2)^2 \quad \left[-8 < x < \frac{3}{4} \right]$$

$$52) \sqrt{3}x^2 - x + \frac{1}{2} \geq x\sqrt{3} - \frac{1}{2} \quad \left[x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cup x \geq 1 \right]$$

II) Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado

- 1) $x^2 - 1 > 0$ [$x < -1 \cup x > 1$]
- 2) $4 - x^2 < 0$ [$x < -2 \cup x > 2$]
- 3) $x^2 - 2x + 1 < 0$ [nessuna soluzione reale]
- 4) $x^2 + x - 6 > 0$ [$x < -3 \cup x > 2$]
- 5) $-x^2 - 2x < 0$ [$x < -2 \cup x > 0$]
- 6) $x^2 - 4x + 6 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R}$]
- 7) $x^2 + 4x + 3 < 0$ [$-3 < x < -1$]
- 8) $x^2 + 5 > 0$ [$\forall x \in \mathbb{R}$]
- 9) $x^2 - 8x > 0$ [$x < 0 \cup x > 8$]
- 10) $-x^2 + 16 \leq 0$ [$x \leq -4 \cup x \geq 4$]

III) Risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo

- 1) $3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 < 0$ [$x < -\frac{2}{3}$]
- 2) $x^4 + x^3 < 0$ [$-1 < x < 0$]
- 3) $x^4 - 2x^2 \geq 0$ [$x \leq -\sqrt{2} \cup x \geq \sqrt{2} \cup x = 0$]
- 4) $x^4 - 1 > 0$ [$x < -1 \cup x > 1$]
- 5) $2x^3 - x^2 - 2x + 1 > 0$ [$-1 < x < \frac{1}{2} \cup x > 1$]
- 6) $6x^3 + x^2 - 11x - 6 \geq 0$ [$-1 \leq x \leq -\frac{2}{3} \cup x \geq \frac{3}{2}$]
- 7) $x^2 - 2x^3 \leq 0$ [$x \geq \frac{1}{2} \cup x = 0$]
- 8) $x^3 + 1 > 0$ [$x > -1$]

IV) Risolvere le seguenti disequazioni fratte

- 1) $\frac{x}{9x^2 - 6x} > 0$ $\left[x > \frac{2}{3} \right]$
- 2) $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 3} < 0$ $\left[x < -5 \cup 1 < x < \frac{3}{2} \right]$
- 3) $\frac{x^2 - 2x + 1}{6x} > 0$ $[x > 0, x \neq 1]$
- 4) $\frac{3}{x - 2} + x + 2 \geq 0$ $[-1 \leq x \leq 1 \cup x > 2]$
- 5) $\frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}]$
- 6) $\frac{5 - x^2}{5x + x^2} \leq 0$ $[x < -5 \cup -\sqrt{5} \leq x < 0 \cup x \geq \sqrt{5}]$
- 7) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 8} < 0$ $[-4 < x < 1]$
- 8) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 6} \geq 0$ $[x \leq -1 \cup 1 < x \leq 4 \cup x > 6]$
- 9) $-\frac{(x^2 - x + 2)}{x - 1} + 4 > 0$ $[x < 1 \cup 2 < x < 3]$
- 10) $\frac{6 + x}{x} < \frac{2}{x + 1}$ $[-3 < x < -2 \cup -1 < x < 0]$
- 11) $1 \leq \frac{14}{3(x + 2)} + \frac{4}{3x - 3}$ $[-2 < x \leq 0 \cup 1 < x \leq 5]$
- 12) $\frac{3}{x^2 - 2x + 1} + \frac{3 + x}{x - 1} > 0$ $[x < -2 \cup x > 0 \text{ e } x \neq 1]$
- 13) $\frac{2x}{x^2 - 9} > \frac{1}{x - 3} - \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 9}$ $\left[-3 < x < 1 \cup x > \frac{3}{2} \right]$
- 14) $\frac{81 - x^4}{x^2 - 3x} \geq 0$ $[-3 \leq x < 0]$

V) Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

$$1) \begin{cases} 2x - x^2 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x + 6 - x^2 > 0 \end{cases} \quad [-1 < x < 0 \cup 2 < x < 3]$$

$$2) \begin{cases} 3 + x^2 > 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \end{cases} \quad [3 < x < 4]$$

$$3) \begin{cases} x^2 - 5x - 7 > 0 \\ -x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \quad [S = \emptyset]$$

$$4) \begin{cases} 8x^2 + 6x - 9 > 0 \\ x^2 + 8x \leq 0 \end{cases} \quad \left[-8 \leq x < -\frac{3}{2}\right]$$

$$5) \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 3x} \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad [x > 3]$$

$$6) \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 7x - 3x^2 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad \left[\frac{3}{2} < x < \frac{7}{3}\right]$$

$$7) \begin{cases} -x^2 + x + 2 < 0 \\ \frac{x+2}{2} \geq 1 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases} \quad [x > 7]$$

$$8) \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0 \\ x(x+2) < 8 \\ 2x^2 - 7x > 0 \end{cases} \quad [-4 < x < -3]$$

$$9) \begin{cases} 3 - x^2 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ x + 4x^2 - 3 < 0 \end{cases} \quad \left[-1 < x < -\frac{1}{2}\right]$$

Problemi

1) Problema svolto

Consideriamo un'equazione di secondo grado contenente un parametro reale k , per esempio

$$x^2 + (k+1)x + 2 - k = 0$$

Possiamo chiederci per quali valori del parametro k l'equazione ha soluzioni reali, cioè per quali valori di k si ha $\Delta \geq 0$.

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

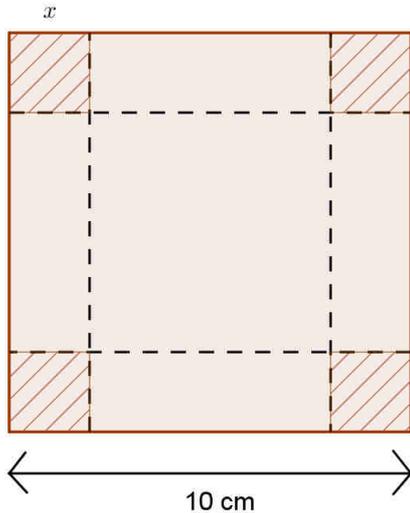
$$(k+1)^2 - 4(2-k) \geq 0 \rightarrow k^2 + 2k + 1 - 8 + 4k \geq 0 \rightarrow k^2 + 6k - 7 \geq 0$$

da cui si ricava ($k_{1,2} = -3 \pm 4 \rightarrow k_1 = -7, k_2 = 1$)

$$k \leq -7 \cup k \geq 1$$

2) Problema guidato

Da una lamiera quadrata di lato 10 cm vogliamo ritagliare quattro quadrati uguali di lato x (vedi figura) in modo che, ripiegando lungo i lati tratteggiati, si possa costruire una "scatola". Per quali valori di x la scatola ha superficie maggiore di 84 cm^2 ?



L'area della base della scatola risulta $(10 - 2x)^2$. Le quattro pareti della scatola hanno area $4(10 - 2x)x$, quindi:

$$(10 - 2x)^2 + 4(10 - 2x)x > 84 \rightarrow \dots\dots\dots$$

Poiché $x > 0$ perché....., allora la soluzione è

Oppure (più semplicemente): $100 - 4x^2 > 84$ da cui si ha.....

3) Per quali valori di m l'equazione $x^2 - 2(m-2)x + 9 = 0$ ha soluzioni reali?

$$[m \leq -1 \cup m \geq 5]$$

4) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - kx + 2x - \frac{k^2 - 5k}{4} = 0$ ha due soluzioni reali distinte?

$$\left[k < \frac{1}{2} \cup k > 4 \right]$$

5) Per quali valori di a l'equazione $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ non ammette soluzioni reali?

$$[a < 1 \cup a > 6]$$

6) **Problema svolto**

Per quali valori di k l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$ ha radici reali e positive?

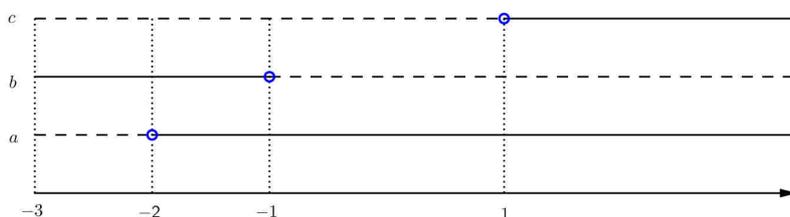
Innanzitutto calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 + (k+2)(1-k) = \dots = k+3$; quindi affinché si abbiano radici reali occorre che $\frac{\Delta}{4} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -3$.

Per il segno delle soluzioni possiamo studiare il segno dei coefficienti e ricordare che, per la regola di Cartesio, ad una variazione corrisponde una radice positiva.

$$a : (k+2) > 0 \Leftrightarrow k > -2$$

$$b : -2(k+1) > 0 \Leftrightarrow k < -1$$

$$c : -(1-k) > 0 \Leftrightarrow k > 1$$



Quindi ho due variazioni (vale a dire due soluzioni positive) per

$$-3 \leq k < -2 \cup k > 1$$

7) Determina per quali valori di k l'equazione $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ ammette due soluzioni reali e negative.

$$[1 \leq k < 2]$$

8) Determina per quali valori di a l'equazione $(2a+3)x^2 - (a+4)x + 1 = 0$

a) ha soluzioni reali;

b) ha due soluzioni positive.

$$\left[\forall a \in \mathbb{R}; a > -\frac{3}{2} \right]$$

9) Data l'equazione $x^2 - 2(k-2)x + k^2 = 0$, determinare per quali valori di k l'equazione:

Appunti di Matematica 2
- Disequazioni di secondo grado -

- a) ammette soluzioni reali
b) ammette soluzioni negative

$$[k \leq 1; k \leq 1, k \neq 0]$$

10) Per quali valori di k le soluzioni di $(k-2)x^2 + (2k+1)x + 3 = 0$ sono discordi?

$$[k < 2]$$

11) Data l'equazione $(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0$, determinare per quali valori di k :

- a) ha soluzioni reali e distinte;
b) ha soluzioni reali e positive;
c) ha soluzioni reali e negative;
d) ha soluzioni reali e discordi.

$$[a) k > -3, k \neq 2; b) -3 < k < -2 \cup k > 1; c) \forall k \in \mathbb{R}; d) -2 < k < 1]$$

12) Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2 . Quanto deve misurare la sua base b affinché il perimetro non superi i 30 cm ?

$$[5 \leq b \leq 10]$$

13) In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti è 1 cm . Quale deve essere la misura x del cateto minore in modo che l'area non superi i 15 cm^2 ?

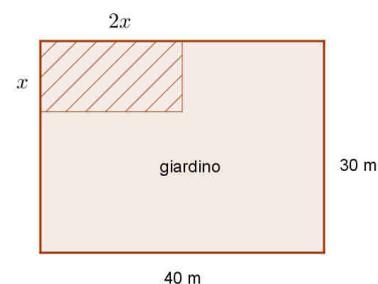
$$[0 < x \leq 5 \text{ cm}]$$

14) Considera due circonferenze concentriche di raggi 4 cm e $x \text{ cm}$ con $x < 4$. Come deve essere il raggio x perché l'area della circonferenza interna sia minore di $\frac{1}{4}$ dell'area della circonferenza di raggio 4 ?

$$[0 < x < 2 \text{ cm}]$$

15) In un appezzamento rettangolare di terreno $30 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ si vuole costruire una casa come in figura qui sotto.

Quale deve essere x (in metri) in modo che il giardino abbia una superficie di almeno 1000 m^2 ?



$$[0 < x \leq 10 \text{ m}]$$

16) In un trapezio rettangolo la base minore è uguale all'altezza e la base maggiore supera di 2 cm la base minore. Quale deve essere la misura della base minore x perché l'area del trapezio non superi i 20 cm^2 ?

$$[0 < x \leq 4 \text{ cm}]$$