Le equazioni di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se, dopo aver applicato i principi di equivalenza, si può scrivere nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad con \quad a \neq 0$$

$a, \quad b, \quad c \quad \in \Re$

Nota: c è anche detto **termine noto.**

Esempio

Sviluppiamo la seguente equazione:

$$x(x-1) + 3x = (2x-1)(2x+1)$$

$$x^2 - x + 3x = 4x^2 - 1 \rightarrow x^2 - x + 3x - 4x^2 + 1 = 0$$
$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado ridotta in forma "normale".

Una **soluzione** (chiamata anche "radice") **dell'equazione è un valore che sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza fra i due membri.**

Esempio

$x^2 - 5x + 6 = 0$ è un'equazione di 2°grado

$x = 2$ è soluzione poiché, sostituendo, abbiamo

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$0 = 0$$

Risolvere un'equazione di 2° grado significa **ricercare le sue soluzioni.**

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Cominciamo con qualche esempio.

1) Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 - 1 = 0$$

Possiamo ricavare

$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$ cioè $x = \pm\frac{1}{2}$

Abbiamo perciò due soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infatti se sostituiamo:

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$$

2) Consideriamo l'equazione:

$$4x^2 + 1 = 0$$

In questo caso $x^2 = -\frac{1}{4}$: non ci sono soluzioni reali poiché nessun quadrato risulta negativo.

3) Consideriamo l'equazione :

$$3x^2 - x = 0$$

Come possiamo risolverla ? Proviamo a mettere in evidenza x:

$$x(3x - 1) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo:

$x = 0$ oppure $3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

Quindi le soluzioni sono : $x_1 = 0 \quad \cup \quad x_2 = \frac{1}{3}$

4) Ma se l'equazione è completa, cioè con *a*, *b*, *c* diversi da zero?

Consideriamo, per esempio : $x^2 + 4x - 5 = 0$

Potremmo cercare di scomporre $x^2 + 4x - 5$ (magari applicando la regola di Ruffini), ma non sempre questo metodo funziona.

Cerchiamo un procedimento che possa sempre funzionare cioè proviamo a riportare l'equazione nella forma

$$(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 = numero$$

in modo da poterla poi risolvere se il *numero* è positivo oppure dire che non ha soluzioni reali se il *numero* risulta negativo.

- Cominciamo a spostare il termine noto: nel nostro caso abbiamo

$$x^2 + 4x = 5$$

- "**Completiamo" il quadrato,** cerchiamo cioè di aggiungere un numero in modo che $x^2 + 4x + ..$ risulti il quadrato di un binomio.

E' chiaro che $4x$ dovrà essere il doppio prodotto e quindi dividendo il coefficiente 4 per 2 otteniamo il 2° termine del binomio

$$\frac{4}{2} = 2$$

Aggiungiamo quindi 2^2 ad entrambi i membri per il principio di equivalenza ed abbiamo:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$$

In questo modo possiamo scrivere

$$(x+2)^2 = 9$$

- A questo punto, essendo 9 un numero positivo, possiamo risolvere scrivendo

$$x + 2 = \pm\sqrt{9}$$
$$x + 2 = \pm 3$$

$$x = -2 + 3 = 1$$
$$x = -2 \pm 3$$
$$x = -2 - 3 = -5$$

Abbiamo quindi trovato due soluzioni:

$$x_1 = 1 \quad \cup \quad x_2 = -5$$

Formula risolutiva di un'equazione di secondo grado

Proviamo a generalizzare, utilizzando le lettere, il procedimento che abbiamo seguito nell'ultimo esempio.
Consideriamo

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

- Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 + bx = -c$$

- Prima di completare il quadrato dividiamo tutto per a (i calcoli risulteranno più semplici):

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- Completiamo il quadrato: ricordiamo che, dovendo essere $\frac{b}{a}x$ il doppio prodotto, dobbiamo aggiungere il quadrato di: $\dfrac{\frac{b}{a}}{2} = \dfrac{b}{2a}$

Quindi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

E facendo qualche calcolo:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

a) Se $\boxed{b^2 - 4ac \geq 0}$ possiamo andare avanti ed abbiamo:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

b) Se $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$ **non abbiamo soluzioni reali**

Nota: $b^2 - 4ac$ viene chiamato "***discriminante***" dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ed indicato con la lettera Δ.
Poniamo cioè $\Delta = b^2 - 4ac$.

Osservazione 1

Se $\boxed{\Delta > 0}$ **le soluzioni dell'equazione sono "distinte"** cioè sono due valori diversi (vedi esempio 4: $x^2 + 4x - 5 = 0$).
Se $\boxed{\Delta = 0}$ **le soluzioni sono "coincidenti"** cioè abbiamo un unico valore.

Esempio: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Infatti $x^2 + 4x + 4$ è il quadrato di $x + 2$ e quindi abbiamo:

$$(x+2)^2 = 0$$

Il quadrato è nullo se $\quad x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad (x_1 = x_2 = -2)$

Osservazione 2

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = 0$ oppure $c = 0$ (si dice che l'equazione non è completa) *non conviene usare la formula risolutiva* generale che abbiamo trovato ma procedere come abbiamo fatto nei primi due esempi.

Generalizziamo quegli esempi usando le lettere.

- Se $\boxed{b = 0}$ abbiamo $ax^2 + c = 0$.

Spostiamo il termine noto:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

a) Se $-\frac{c}{a} \geq 0$ allora $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (la scrittura $x_{1,2}$ indica che ci sono due soluzioni x_1, x_2).

Vedi l'esempio 1: $4x^2 - 1 = 0$.

b) Se $-\frac{c}{a} < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni reali (vedi esempio 2: $4x^2 + 1 = 0$).

- Se $\boxed{c = 0}$ abbiamo $ax^2 + bx = 0$

Mettiamo in evidenza la *x*: $\quad x(ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo quindi:

$$x_1 = 0 \text{ oppure } ax + b = 0 \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

(vedi l'esempio 3 : $3x^2 - x = 0$).

La formula ridotta

Quando **il coefficiente *b* è un numero pari** possiamo utilizzare una formula "semplificata" chiamata " ridotta".

Infatti se $b = 2\beta$ abbiamo:

$$x_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - ac}}{2a} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Quindi , essendo $\beta = \frac{b}{2}$, possiamo scrivere:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

Osservazione: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4} = \frac{\Delta}{4}$

Esempio: $x^2 - 2x - 35 = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 35} = 1 \pm 6$$

$$x_1 = 1 + 6 = 7$$

$$x_2 = 1 - 6 = -5$$

Somma e prodotto delle soluzioni

Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$.

Somma delle soluzioni
Proviamo a sommare le soluzioni x_1, x_2 ottenute con la formula risolutiva:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$
$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

In conclusione si ha:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Prodotto delle soluzioni

Vediamo cosa si ottiene moltiplicando le soluzioni:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) =$$
$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

In conclusione so ha:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Nota

Quindi , ponendo $x_1 + x_2 = s$, $x_1 \cdot x_2 = p$ possiamo anche scrivere

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - sx + p = 0$$

Scomposizione di $ax^2 + bx + c$

1) Se $\Delta > 0$ abbiamo due soluzioni distinte dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ e possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right] = \\ &= a\left[x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2\right] = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

In conclusione

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

Esempio: scomponiamo $2x^2 - x - 1$.

Calcoliamo le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Quindi $\quad 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

2) Se $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ e abbiamo $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_1)$ cioè:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

Esempio : scomponiamo $4x^2 - 12x + 9$.

Considero $4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{4} = \frac{3}{2}$ e quindi $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

Infatti $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ che risulta equivalente a $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$.

3) Se $\Delta < 0$ l'equazione associata non ha soluzioni reali e quindi *il trinomio non si può scomporre in "campo reale"* (si dice irriducibile in $\Re$).

   Esempio : consideriamo $x^2 + x + 1$.

   Poiché l'equazione associata $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$ il trinomio risulta irriducibile in $\Re$.

Regola di Cartesio

Consideriamo un'equazione di secondo grado completa $ax^2+bx+c=0$ con $\Delta \geq 0$.
Prendiamo in esame i segni dei coefficienti *a*, *b*, *c* e chiamiamo "*permanenza*" la presenza di coefficienti consecutivi dello stesso segno e "*variazione*" la presenza di coefficienti consecutivi discordi.

Esempi

Nell'equazione $x^2-3x+2=0$ abbiamo $a=1$, $b=-3$, $c=2$ e quindi due "variazioni".

Nell'equazione $x^2+3x+2=0$ abbiamo $a=1$, $b=3$, $c=2$ e quindi due "permanenze".

Nell'equazione $x^2-x-2=0$ abbiamo $a=1$, $b=-1$, $c=-2$ e quindi una "variazione" e una "permanenza".

Dimostriamo che

- ad ogni "**permanenza"** corrisponde una **soluzione negativa;**
- ad ogni "**variazione**" corrisponde una **soluzione positiva.**

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che possiamo supporre $a>0$: infatti se a risultasse negativo possiamo moltiplicare tutti i termini per -1 ed ottenere così un'equazione equivalente (cioè con le stesse soluzioni) e con lo stesso numero di permanenze e variazioni ma con $a>0$.

a) Supponiamo che ci siano due permanenze cioè che si abbia

+	+	+
a	**b**	**c**

Avremo quindi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow soluzioni \quad concordi$, ma essendo $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ saranno *entrambe negative*.

b) Supponiamo che ci siano due variazioni cioè si abbia

+	-	+
a	**b**	**c**

Avremo quindi $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow soluzioni \quad concordi$, ma essendo $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$ saranno *entrambe positive*.

c) Supponiamo che ci siano una variazione ed una permanenza cioè si abbia

+	-	-
a	**b**	**c**

Avremo $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow soluzioni \quad discordi$ e quindi una positiva e una negativa.

d) Supponiamo che ci siano una permanenza e una variazione cioè

+	+	-
a	**b**	**c**

In questo caso $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow soluzioni \quad discordi$ e quindi una positiva e una negativa.

Equazioni di secondo grado contenenti un parametro

Se un'equazione di secondo grado contiene una lettera, che spesso prende il nome di *parametro*, si possono cercare i valori da attribuire alla lettera perché sia verificata una certa condizione.

Esempi

1) Per quali valori di k l'equazione $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ ha due soluzioni reali distinte?

Dovrà essere $\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)>0$

Quindi sviluppando:

$$4k^2-4k+1-4k^2+4>0$$
$$-4k+5>0$$
$$4k-5<0$$
$$k<\frac{5}{4}$$

2) Per quali valori di k l'equazione $x^2-(k+1)x+1=0$ ha due soluzioni reali coincidenti?

Dovrà essere $\Delta=(k+1)^2-4=0 \to k^2+2k+1-4=0 \to k^2+2k-3=0$

$$k_{1,2}=-1\pm 2 \quad \begin{cases} k_1=-1+2=1 \\ k_2=-1-2=-3 \end{cases}$$

3) Per quali valori di k l'equazione $x^2-(2k-3)x+k^2=0$ non ha soluzioni reali?

Dovrà essere:

$$\Delta=(2k-3)^2-4k^2<0 \to 4k^2-12k+9-4k^2<0$$
$$\to -12k+9<0 \to 12k-9>0$$
$$k>\frac{3}{4}$$

I problemi di secondo grado

Spesso risolvendo un problema (di geometria analitica, euclidea ecc.), dopo aver posto come incognita x la misura di un segmento o qualche altra quantità, ci si trova a dover risolvere un'equazione di secondo grado. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

Determina le lunghezze dei lati di un rettangolo di area $15\ cm^2$ *e perimetro* $16\ cm$.
Possiamo risolvere questo problema in due modi:

a) Se $2p = 16\ cm \rightarrow p = 8\ cm$ (semiperimetro). Quindi, se indichiamo con x un lato del rettangolo, l'altro risulterà $8 - x$.

Ma dal momento che l'area è $15\ cm^2$ avremo:

$$x(8 - x) = 15 \rightarrow 8x - x^2 = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado che risolta dà:

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 \begin{array}{l} \nearrow 5 \\ \searrow 3 \end{array}$$

Osserviamo che se $x = 5$ allora l'altra dimensione è $8 - 5 = 3$ e che se $x = 3$ allora l'altra dimensione è $8 - 3 = 5$, cioè le dimensioni del rettangolo sono in ogni caso 3 e 5.

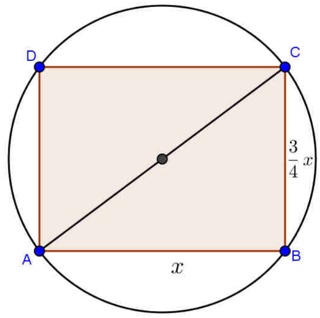
b) Se l'area del rettangolo misura $15\ cm^2$, indicato con x un lato, l'altro sarà $\frac{15}{x}$ $(x \neq 0)$ e poiché il perimetro misura $16\ cm$ avremo:

$$2\left(x + \frac{15}{x}\right) = 16 \rightarrow x + \frac{15}{x} = 8 \rightarrow x^2 + 15 = 8x \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

ed abbiamo ritrovato l'equazione precedente.

Esempio 2

I lati di un rettangolo inscritto in una circonferenza di diametro 30 cm stanno tra loro nel rapporto $\frac{3}{4}$*. Determina l'area del rettangolo.*



Se indichiamo con x la misura di un lato, l'altro lato sarà $\frac{3}{4}x$ ed **applicando il teorema di Pitagora** (ricordiamo che il diametro coincide con la diagonale del rettangolo) avremo:

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=30^2$$

Sviluppando:

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=900\rightarrow\frac{25}{16}x^2=900\rightarrow x^2=576\rightarrow x=24$$

($x^2=576\rightarrow x=\pm 24$ ma è accettabile solo la soluzione positiva).

Quindi l'altro lato risulta $\frac{3}{4}\cdot 24=18$ e possiamo calcolare l'area del rettangolo è :

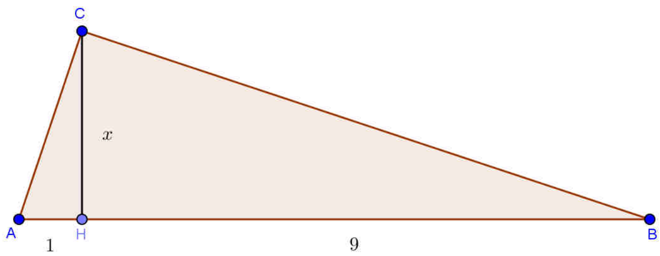
$$A=24\cdot 18=432\ \ cm^2$$

Esempio 3

Calcola l'area di un triangolo rettangolo sapendo che l'ipotenusa è lunga 10 cm e che le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono proporzionali ai numeri 1 e 9.

Innanzitutto, se AH e HB sono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa si ottiene subito che

$$\overline{AH}=1\ \ cm,\quad \overline{HB}=9\ \ cm$$



Se indichiamo con x la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, applicando il **secondo teorema di Euclide** abbiamo che

$$x^2=1\cdot 9\rightarrow x^2=9\rightarrow x=3$$

($x^2=9\rightarrow x=\pm 3$ ma la soluzione negativa non è accettabile poiché x rappresenta una misura).

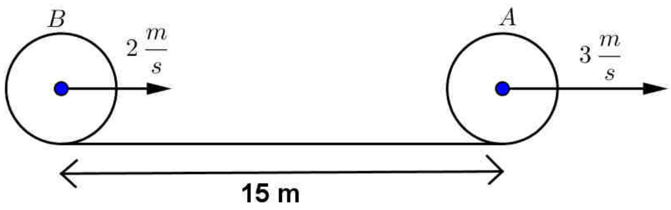
In conclusione l'area del triangolo risulta

$$A=\frac{10\cdot 3}{2}=15\ \ cm^2$$

Esempio 4

Due ciclisti A e B stanno viaggiando uno dietro l'altro sullo stesso rettilineo con velocità

$$v_A = 3\ \frac{m}{s}, \quad v_B = 2\ \frac{m}{s}$$



Nell'istante in cui B si trova 15 *m* dietro ad A, comincia ad accelerare con $a = 0{,}5\ \frac{m}{s^2}$, mentre A mantiene la stessa velocità. *In quanto tempo B raggiungerà A?*

Indichiamo con s_A lo spazio percorso dal ciclista A in un tempo t : poiché il moto di A è rettilineo uniforme si avrà

$$s_A = 3t \qquad (s = v \cdot t)$$

Poiché invece B comincia ad accelerare con accelerazione costante $a = 0{,}5\ \frac{m}{s^2}$, lo spazio s_B sarà

$$s_B = 2t + \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 \qquad \left(s = v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \right)$$

Dal momento che B raggiungerà A quando $\boxed{s_B = s_A + 15}$ dovremo avere:

$$2t + \frac{1}{4}t^2 = 3t + 15$$

$$\to \frac{1}{4}t^2 - t - 15 = 0 \to t^2 - 4t - 60 = 0$$

$$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 60} = 2 \pm 8$$

10

-6 (non accettabile)

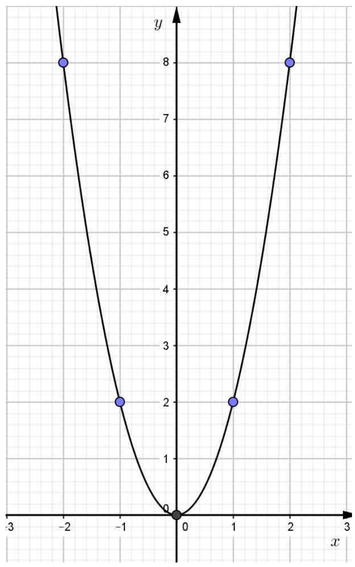
Quindi B raggiungerà A dopo 10 secondi.

La funzione $y = ax^2 + bx + c$

Vediamo come risulta, nel piano cartesiano, il grafico della funzione "quadratica" $y = ax^2 + bx + c$ .Vediamo alcuni esempi e cominciamo con una funzione del tipo $y = ax^2$.

a) $\boxed{y = 2x^2}$

x	y
-2	8
-1	2
0	0
1	2
2	8

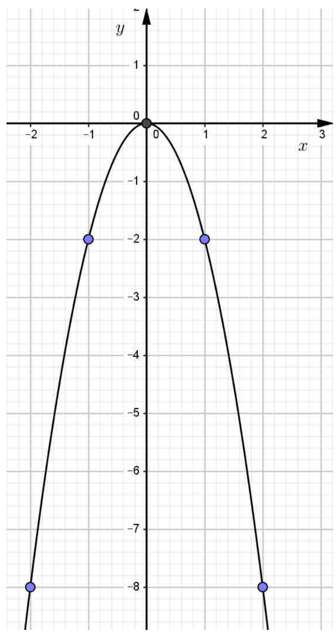


La curva che otteniamo si chiama "parabola": è simmetrica rispetto all'asse y e il punto in cui interseca l'asse di simmetria è chiamato "vertice" (nel nostro esempio il vertice è $V(0;0)$).

Se il coefficiente a di x^2 è positivo come nel nostro esempio, la parabola è rivolta verso l'altro.

Se invece proviamo a disegnare $y = -2x^2$ ($a < 0$), avremo una parabola rivolta verso il basso:

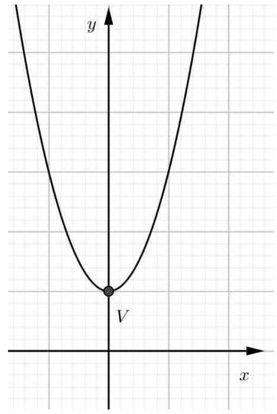
x	y
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8



Osservazione

Se aumentiamo il valore assoluto di a la parabola "si stringe": basta per esempio confrontare nello stesso sistema di riferimento $y = x^2$ con $y = 2x^2$.

b) $\boxed{y = 2x^2 + 1}$



E' chiaro che questa parabola risulta traslata del vettore $\vec{v}(0;1)$ rispetto alla parabola $y = 2x^2$ ed ha quindi il vertice in $V(0;1)$.

c) $\boxed{y = 2x^2 - 4x + 4}$

Possiamo disegnare il grafico per punti ed accorgersi che otteniamo un grafico della stessa forma dei precedenti.
Se il vertice è $V(x_V ; y_V)$ è chiaro che l'equazione della parabola sarà del tipo

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Cerchiamo allora di fare dei passaggi per scrivere l'equazione della parabola in quella forma.

- Spostiamo il termine noto $\quad y - 4 = 2x^2 - 4x$
- Mettiamo in evidenza il coefficiente di x^2 tra il termine con x^2 e quello con x

$$y - 4 = 2(x^2 - 2x)$$

- "Completiamo" il quadrato nella parentesi.

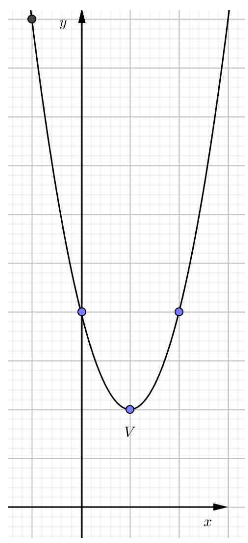
Perché $x^2 - 2x$ diventi lo sviluppo del quadrato di un binomio manca +1 ma poiché è tutto moltiplicato per 2 , all'altro membro devo aggiungere $2 \cdot 1 = 2$ cioè:

$$y - 4 + 2 = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$\boxed{y - 2 = 2(x - 1)^2}$$

Quindi la nostra parabola ha $a = 2$ e vertice $V(1;2)$.
Possiamo controllare anche facendo la tabella x,y: per esempio $y(-1) = 2(-1)^2 - 4(-1) + 4 = 2 + 4 + 4 = 10$ ecc.

x	y
-1	10
0	4
1	2
2	4
3	10



Osservazione

Ma c'è un modo per determinare il vertice senza dover fare tutti questi passaggi?

Ripetiamo il procedimento seguito partendo dall'equazione generale della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

Abbiamo:

$$y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) \rightarrow y - c + \frac{b^2}{4a} = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \rightarrow y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Quindi, ricordando che l'espressione deve corrispondere a $y - y_V = a(x - x_V)^2$, abbiamo che:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$
$$y_V = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Osserviamo che possiamo memorizzare solo

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

perché possiamo poi trovare l'ordinata del vertice sostituendo l'ascissa trovata nell'equazione della parabola.

Per esempio nel nostro caso l'equazione della parabola è

$$y = 2x^2 - 4x + 4$$

e quindi possiamo subito scrivere

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow y_V = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$$

Abbiamo quindi ritrovato il vertice $V(1;2)$.

Esercizio svolto

Disegna la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

Per prima cosa determiniamo il vertice:

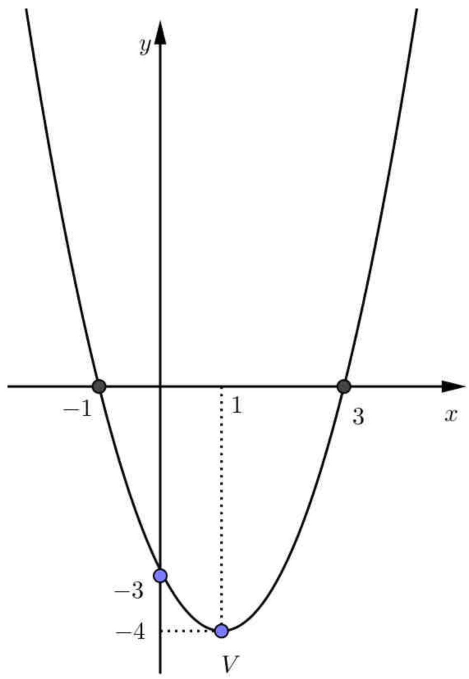
$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y_V = 1 - 2 - 3 = -4$$

Il vertice è quindi $V(1;-4)$.

Per disegnare la parabola è importante determinare l'intersezione con l'asse *y*, che si ottiene ponendo $x = 0$ e, se ci sono, le intersezioni con l'asse *x* che si ottengono ponendo $y = 0$ e quindi risolvendo l'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$.

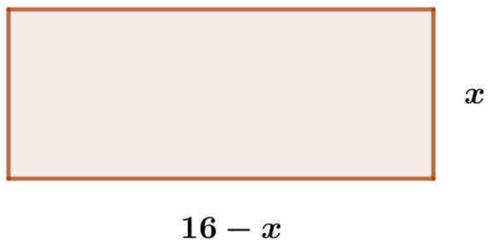
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_2 = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$



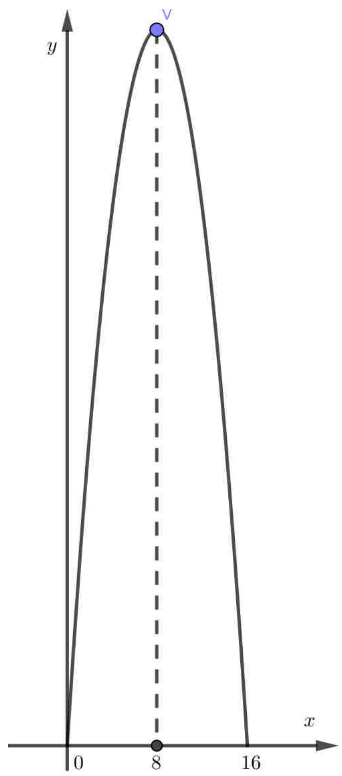
Problema svolto

Supponiamo di voler costruire una piscina rettangolare e di aver già comprato il rivestimento del bordo che dovrà essere lungo 32 m. Quali sono le dimensioni della piscina di area massima?
E' chiaro che se indichiamo con x una dimensione del rettangolo che rappresenta la piscina avremo che l'altra dimensione è $16-x$.



Se indichiamo con y l'area abbiamo quindi

$$y = x \cdot (16-x)$$



Se sviluppiamo ci accorgiamo che si tratta di una parabola rivolta verso il basso, avente il vertice in $V(8;64)$.

Quindi *il valore massimo dell'area si ha per* $x=8$ (ascissa del vertice della parabola) e per questo valore di x l'altra dimensione risulta $16-8=8$ cioè la piscina di perimetro 32 m e massimo perimetro risulta **quadrata** ed ha area di $64m^2$.

Esercizi
(risoluzione di un'equazione di secondo grado)

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado:

1) $2 - x^2 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$; $9x^2 = 0$ [$\pm\sqrt{2}$; 0, 6; $x = 0(doppia)$]

2) $7x - 5x^2 = 0$; $4 + 3x^2 = 0$; $25 = 9x^2$ [0, $\frac{7}{5}$; *impossibile*; $\pm\frac{5}{3}$]

3) $\frac{1}{2}x^2 = 0$; $1 - x^2 = 0$; $9x^2 - 12x = 0$ [$x = 0(doppia)$; ± 1; 0, $\frac{4}{3}$]

4) $-3x^2 = -12$; $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{5}x$; $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$ [± 2; 0, $\frac{4}{5}$; ± 6]

5) $-4x^2 = 36$; $2x^2 - \frac{8}{3}x = 0$; $4 - x^2 = 0$ [impossibile; 0, $\frac{4}{3}$; ± 2]

6) $3\sqrt{5}x^2 = 0$; $16x^2 = 1$; $-3x^2 + 6x = 0$ [$x = 0(doppia)$; $\pm\frac{1}{4}$; 0, 2]

7) $\frac{5}{3}(2x-3)(x+1) = 10x - 5$ [$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{2}$]

8) $3x^2 + \frac{3}{2} - \frac{(x+2)}{2} = \frac{3-x}{2} - (1 + x^2)$ [$x_1 = x_2 = 0$]

9) $\sqrt{5}(x^2 - 1) + 1 = x^2$ [$x_{1,2} = \pm 1$]

10) $11x + (x-2)^2 + (2x+1)(x-3) = (x+1)^2 - 14$ [impossibile]

11) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ [$-\frac{1}{2}$, 3]

12) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ [$x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$]

13) $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

14) $x^2+5x+6=0$ $\qquad$ [$x_1=-3, \quad x_2=-2$]

15) $x^2-5\sqrt{2}x+12=0$ $\qquad$ [$x_1=2\sqrt{2}, \quad x_2=3\sqrt{2}$]

16) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}=0$ $\qquad$ [$x_1=\frac{1}{6}, \quad x_2=\frac{1}{2}$]

17) $x^2+\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}=0$ $\qquad$ [$x_1=x_2=-\frac{4}{5}$]

18) $x^2+3\sqrt{2}x+6=0$ $\qquad$ [$x_1=-2\sqrt{3}, \quad x_2=-\sqrt{3}$]

19) $(2x+1)^2-x^2-(x-1)^2=(2x+3)(2x-3)+1$ $\qquad$ [$x_1=-1, \quad x_2=4$]

20) $(2-3x)(x-2)+3(x-1)^2=(x-1)(x+3)$ $\qquad$ [$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$]

21) $(1-x)^2=2x+\frac{x^2-3x+7}{2}$ $\qquad$ [$x_{1,2}=\frac{5\pm 3\sqrt{5}}{2}$]

22) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x(x+2)-5x+\frac{1}{6}=\frac{x}{3}(x-5)$ $\qquad$ [$x_{1,2}=5\pm 2\sqrt{6}$]

23) $\frac{6-3x}{5}+\frac{x^2+2}{15}-x=\frac{4-x^2}{3}$ $\qquad$ [$x_1=0, \quad x_2=4$]

24) $(x-1)^3=x^2(x-1)-(x+3)(x-2)-19$ $\qquad$ [$x_1=-2, \quad x_2=6$]

25) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)+2$ $\qquad$ [$x_1=-5, \quad x_2=0$]

26) $\frac{2x}{15}+\frac{x^2+x}{6}=\frac{(x+2)(x+1)}{10}$ $\qquad$ [$x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$]

27) $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2}-\frac{x-3}{4}\right)=\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$ $\qquad$ [$x_1=-2, \quad x_2=12$]

28) $\frac{3x}{x+2}=\frac{3}{x}$ $\qquad$ [$x_1=2, \quad x_2=-1$]

29) $\frac{3x+1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2+x}$ $[\, x_1=-1-\sqrt{2}, \quad x_2=-1+\sqrt{2}\,]$

30) $\frac{1}{x}-3=\frac{1+x}{x-2}$ $[\, x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=1\,]$

31) $\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$ $[\, x_1=3, \quad x_2=1(non \quad accettabile)]$

32) $\frac{x-5}{x+3}+\frac{80}{x^2-9}=\frac{1}{2}+\frac{x-8}{3-x}$ [impossibile]

33) $x^2+8x-9=0$ $[\, x_1=-9, \quad x_2=1\,]$

34) $10x^2+8x+5=0$ [impossibile]

35) $9+16x^2+24x=0$ $[\, x_1=x_2=-\frac{3}{4}\,]$

36) $3x^2+2\sqrt{3}x-3=0$ $[\, x_1=-\sqrt{3}, \quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\,]$

37) $x^2=\frac{1}{3}(2x+1)$ $[\, x_1=-\frac{1}{3}, \quad x_2=1\,]$

38) $\frac{7}{4}-3x-x^2=0$ $[\, x_1=-\frac{7}{2}, \quad x_2=\frac{1}{2}\,]$

39) $3x^2+4x-4=0$ $[\, x_1=\frac{2}{3}, \quad x_2=-2\,]$

40) *Esercizio svolto*

$$3x^2-4\sqrt{3}x+2x+3-2\sqrt{3}=0 \rightarrow 3x^2-2(2\sqrt{3}-1)x+3-2\sqrt{3}=0$$

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}=(2\sqrt{3}-1)^2-3(3-2\sqrt{3})=12+1-4\sqrt{3}-9+6\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

Osserviamo che scrivendo 4 come 3 + 1 possiamo pensare $2\sqrt{3}$ come il doppio prodotto nello sviluppo del quadrato di $\sqrt{3}+1$ e quindi abbiamo:

$$\frac{\Delta}{4}=4+2\sqrt{3}=3+1+2\sqrt{3}=(\sqrt{3})^2+1+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$$

In conclusione: $x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}-1\pm(\sqrt{3}+1)}{3} \rightarrow \qquad x_1=\sqrt{3}, \qquad x_2=\frac{\sqrt{3}-2}{3}$

41) *Esercizio svolto*

$$\frac{3x-2}{x-1}=\frac{x}{x+1}-3-\frac{2x}{1-x^2}$$

Le condizioni di esistenza sono

$x-1\neq 0 \rightarrow x\neq 1$

$x+1\neq 0 \rightarrow x\neq -1$

$1-x^2=(1-x)(1+x)\neq 0 \rightarrow x\neq \pm 1$

Sviluppiamo: $\dfrac{(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x(x-1)-3(x^2-1)+2x}{(x-1)(x+1)} \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1(non \quad accettabili)$

Poiché le soluzioni sono entrambe non accettabili l'equazione è impossibile.

42) $\dfrac{x-3}{x-1}+2=\dfrac{x-3}{x+2}+\dfrac{x-13}{x^2+x-2}$ $[x_1=0, \quad x_2=-2(non \quad accettabile)]$

43) $\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6}+\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{x+2}{x-3}$ $[x_1=0, \quad x_2=2(non \quad accettabile)]$

44) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{5-x^2}{x^2-x-6}$ $[x_1=1, \quad x_2=-4]$

45) $\dfrac{x+7}{3x^2-7x+2}+2=\dfrac{3-x}{x-2}$ $[x_1=1, \quad x_2=\dfrac{14}{9}]$

46) $\dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{3}{x-3}+4=\dfrac{30+5x^2-36x}{x^2-7x+12}$ $[x_1=-2, \quad x_2=-3]$

47) Per quali valori di k l'equazione $x^2+(2k-2)x+k^2+2=0$ ha soluzioni reali?

$[k\leq -\dfrac{1}{2}]$

48) Per quali valori di a l'equazione $x^2+(2a-1)x+a^2=0$ non ha soluzioni reali?

$[a>\dfrac{1}{4}]$

49) Discuti, al variare di k, le soluzioni dell'equazione $kx^2-2(k+1)x+4=0$.

$[k=0 \rightarrow x=2, \quad k=1 \rightarrow x_1=x_2=2, \quad k\neq 0, \quad k\neq 1 \rightarrow x_1=2, \quad x_2=\dfrac{2}{k}]$

50) Per quali valori di k l'equazione $x^2-kx-20k^2=0$ ha soluzioni reali coincidenti?

$[k=0]$

Esercizi

(Problemi di secondo grado)

1) In un triangolo rettangolo un cateto misura 1 cm in più dell'altro e l'ipotenusa è 5 cm. Determina i cateti del triangolo.

[3 cm ; 4 cm]

2) Se in un quadrato un lato viene aumentato del 20% e un altro viene diminuito del 20%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato diminuita di 1 cm^2. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[5 cm]

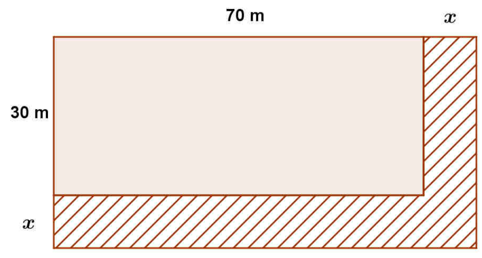
3) L'area di un rombo è 24 cm^2 e una diagonale supera l'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo.

[$2p = 20 \ cm$]

4) In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro.

[$2p = 48 \ cm$]

5) Il proprietario di un terreno deve cederne una parte di area 416 m^2 per la costruzione di una strada (vedi figura).Calcola *x*.



[$x = 4 \ m$]

6) Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 13 cm e il suo perimetro è 68 cm. Determina i lati del rettangolo.

[$10 \ cm; \quad 24 \ cm$]

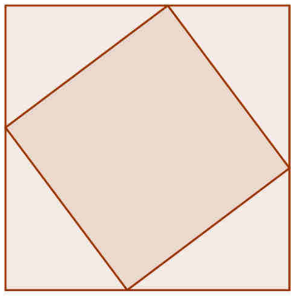
7) In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2 e il perimetro è 16 cm. Determina l'area.

[$12 \ cm^2$]

8) Un rettangolo ha area $40 \ cm^2$ e i suoi lati misurano uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è $30 \ cm^2$ in più dell'area iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo.

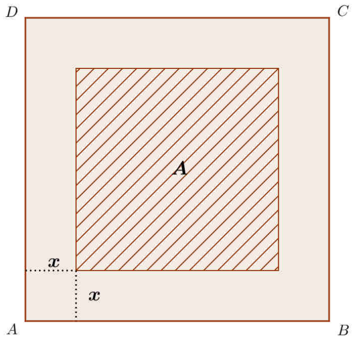
[$34 \ cm$]

9) In un quadrato di area $49 \ cm^2$ è inscritto un quadrato di area $25 \ cm^2$. Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande.



[$12 \ cm$]

10) Osserva la figura: sapendo che l'area del quadrato ABCD è $256 \ cm^2$ e che $A = 100 \ cm^2$ quanto vale x ?



[3 cm]

11) In un triangolo isoscele la lunghezza della base supera di $5a$ quella del lato obliquo. Determina l'area sapendo che il perimetro misura $80a$.

[$300 \ a^2$]

12) Due triangoli rettangoli congruenti hanno un cateto in comune, l'altro posto su rette parallele. Il perimetro di ciascun triangolo è $108a$, mentre quello del poligono individuato da essi è $144a$. Determina la lunghezza del cateto comune e dell'ipotenusa.

[$36a$; $45a$]

13) In un trapezio rettangolo una base è doppia dell'altra, l'altezza supera di 1 cm la base minore e l'area è $3 \ cm^2$. Determina l'altezza del trapezio.

[2 cm]

14) In un rombo di perimetro $100k$, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è $60k$. Determina l'area del rombo.

[$600 \ k^2$]

15) Il diametro di una semicirconferenza misura 15 cm. Calcola la lunghezza dei tre lati di un triangolo inscritto nella semicirconferenza sapendo che i due lati distinti dal diametro sono uno i $\frac{3}{4}$ dell'altro.

[15 cm; 12 cm; 9 cm]

16) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 25 cm e supera di 9 cm una delle proiezioni dei cateti. Determina l'area del triangolo.

[$150 \ cm^2$]

17) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 50 cm e un cateto uguale ai $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa.

[120 cm]

18) Il cateto maggiore di un triangolo rettangolo è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa ed è anche il doppio dell'altra proiezione aumentato di $2a$. Determina l'area del triangolo.

[$150 \ a^2$]

19) In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ volte il cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto misura $\frac{4}{5}\sqrt{5} \ cm$. Determina il perimetro del triangolo.

[$2p = \left(12 + 4\sqrt{5}\right) \ cm$]

20) L'area di un triangolo rettangolo è $80 \ cm^2$. Determina l'ipotenusa sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto.

[$4\sqrt{29} \ cm$]

Esercizi

(Funzione $y = ax^2 + bx + c$)

1) Disegna le seguenti parabole individuando il vertice, l'intersezione con l'asse y e le eventuali intersezioni con l'asse x .

a) $y = -x^2 + 2$ [$V(0;2)$, $(\pm\sqrt{2},0)$]

b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ [$V(0;-2)$, $(\pm 2;0)$]

c) $y = x^2 - 4x$ [$V(2;-4)$, $(0;0)$ $(4;0)$]

d) $y = -x^2 + 2x - 1$ [$V(1;0)$]

e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ [$V\left(1;-\frac{1}{2}\right)$]

f) $y = 5x^2 - 4x - 1$ [$V\left(\frac{2}{5};-\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5};0\right)$ $(1;0)$]

2) Scrivi l'equazione delle parabole seguenti e disegnale.

a) $V(1;3)$, $a = 1$ [$y = x^2 - 2x + 4$]

b) $V(0;-2)$, $a = -\frac{1}{2}$ [$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$]

c) $V(-1;0)$, $a = 3$ [$y = 3x^2 + 6x + 3$]

d) $V(0;0)$, $a = -4$ [$y = -4x^2$]

e) $V(-1;4)$, $a = 2$ [$y = 2x^2 + 4x + 6$]

f) $V(1;1)$, $a = -1$ [$y = -x^2 + 2x$]

Esercizi di ricapitolazione

I) Risolvi le seguenti equazioni

1. $4x^2 - 2 = 0$ $\qquad [\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}]$

2. $2x^2 + 1 = 0$ $\qquad$ [impossibile]

3. $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ $\qquad [\ x_1 = 0; \quad x_2 = -6\ ]$

4. $(x-3)\cdot(x+3) = 3x\cdot(x-1) + 3x - 9$ $\qquad [\ x_1 = x_2 = 0]$

5. $x\cdot(x+3) + 1 = (1+x)^2 - 2x\cdot\left(1+\frac{1}{2}x\right)$ $\qquad [\ x_1 = 0; \quad x_2 = -3]$

6. $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ $\qquad [\ x_1 = 2\sqrt{2}; \quad x_2 = \sqrt{2}]$

7. $\frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{1}{3}(x-6) = \frac{2}{3}$ $\qquad [\ x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{16}{3}]$

8. $\frac{(2-x)(2+x)}{2} + \frac{2}{3}x = \frac{7}{3} - \frac{2}{15}x - \frac{(2x-1)^2}{5}$ $\qquad [\ x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}]$

9. $\frac{10-2x}{x^2-9} + \frac{1-x}{3-x} = \frac{3}{2x+6} + \frac{23}{2x^2-18}$ $\qquad [x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}]$

10. $\frac{x}{x+3} = \frac{6}{x-3} - \frac{27-x^2}{9-x^2}$ $\qquad [\ x = \frac{15}{2}; \quad -3 \quad \textit{non} \quad \textit{accettabile}]$

11. $\frac{2x}{2x-1} - \frac{(8x^2+3)}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1}$ $\qquad [x_1 = 0; \quad x_2 = -1]$

12. $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-x^2} = \frac{x}{x^2-x}$ $\qquad [x_{1,2} = \pm\sqrt{2}\ ]$

13. $3\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x^2}$ $\qquad [x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{3}{2}]$

14. $\frac{x}{5} = \frac{x+2}{x-2} - \frac{4}{5}$ $\qquad [x_1 = 6; \quad x_2 = -3]$

15. $\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{1}{x+5}$ [$x_1=5$; $x_2=-10$]

16. $\frac{9}{x^2+6x}-\frac{x-2}{2x+12}=\frac{1}{2x}$ [$x_1=4$; $x_2=-3$]

17. $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{21-x}{x^2-9}$ [impossibile]

18. $\frac{8}{x-1}-3=\frac{6}{x+1}-\frac{x^2+x-3}{x^2-1}$ [$x_1=\frac{7}{2}$; $x_2=-2$]

19. $\frac{x+7}{3x^2-7x+2}+2=\frac{3-x}{x-2}$ [$x_1=1$; $x_2=\frac{14}{9}$]

20. $\frac{1}{1-x^2}=\frac{2x}{4x-4}$ [impossibile]

II) Considera le seguenti equazioni contenenti un parametro

1. Per quale valore di k l'equazione $kx^2-2(k+1)x+4=0$ ha soluzioni coincidenti?
[$k=1$]
2. Per quali valori di k l'equazione $2kx^2+kx-x=0$ ha soluzioni reali distinte?
[$k\neq 0$; $k\neq 1$]
3. Per quali valori di a l'equazione $x^2-(a-2)x-a=0$ ha soluzioni reali ?
[$\forall a\in\Re$]

4. Per quali valori di k l'equazione $x^2-2kx+5k-6=0$ ha soluzioni reali coincidenti?

[$k_1=2$; $k_2=3$]
5. Per quali valori di k l'equazione $6x^2+(2k-3)x-k=0$ ha soluzioni reali?
[$\forall k\in\Re$]
6. Per quali valori di k l'equazione $kx^2+(4k-1)x+4k=0$ $(k\neq 0)$ ha soluzioni reali distinte?

[$k<\frac{1}{8}$, $k\neq 0$ **]**

III) Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado

1. $6x^2 + 13x + 7$ [$6(x+1)\left(x+\frac{7}{6}\right)$]

2. $4x^2 - 8x + 3$ [$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$]

3. $x^2 + 6x + 5$ [$(x+1)\cdot(x+5)$]

4. $2x^2 - 4x + 5$ [irriducibile]

5. $5x^2 + 4x + \frac{4}{5}$ [$5\cdot\left(x+\frac{2}{5}\right)^2$]

6. $4a^2 - 4a - 3$ [$(2a-3)\cdot(2a+1)$]

IV) Disegna le seguenti parabole (determinando le coordinate del vertice, eventuali punti di intersezione con l'asse x e l'intersezione con l'asse y)

1. $y = 4x - x^2$. [$V(2;4)$; $(0;0)$ $(4;0)$]

2. $y = x^2 - 2x + 1$. [$V(1;0)$; $(0;1)$]

3. $y = x^2 - 2x$ [$V(1;-1)$; $(0;0)$; $(2;0)$]

4. $y = -2x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$]

5. $y = x^2 - 2x + 3$ [$V(1;2)$; $(0;3)$]

6. $y = -x^2 - 2x$ [$V(-1;1)$; $(0;0)$; $(-2;0)$]

7. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ [$V(2;-1)$; $(2 \pm \sqrt{2};0)$; $(0;1)$]

8. $y = -x^2 + 1$ [$V(0;1)$; $(\pm 1;0)$]

V) Risolvi i seguenti problemi di secondo grado

1. Un quadrato ha il perimetro di 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro mentre l'area è $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo.

[3 cm; 9 cm]

2. Un rettangolo di area $20 \ cm^2$ ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo.

[$2p = 18 \ cm$]

3. Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di $70 \ cm^2$. Determina tale quantità.

[5 cm]

4. Un rettangolo ha il perimetro $2p = 14cm$ e l'area $A = 10cm^2$. Determina le sue dimensioni.

[2; 5]

5. In una semicirconferenza di raggio $r = \frac{13}{2}cm$ è inscritto un triangolo avente perimetro $2p = 30cm$. Determina la misura dei cateti.

[5, 12]

6. In un trapezio rettangolo di area $12cm^2$, l'altezza supera di 1 cm la base minore e la base maggiore è il triplo della minore. Determina il perimetro del trapezio.

[$2p = 16cm$]

7. In un rombo di perimetro 80*a*, il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dalle diagonali è 48*a*. Determina l'area del rombo.

[$A = 384a^2$]

8. In un triangolo rettangolo l'area misura $120cm^2$ e il cateto maggiore supera di 4 cm il doppio del cateto minore. Determina il perimetro del triangolo.

[$2p = 60cm$]

9. In un triangolo isoscele la base supera di 1 cm l'altezza e il perimetro è 8 cm. Determina l'area del triangolo.

[$A = 3cm^2$]

10. Se in un quadrato un lato viene aumentato del 25% e un altro viene diminuito del 50%, si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato iniziale diminuita di $6cm^2$. Qual è la misura del lato del quadrato iniziale?

[4 cm]