Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

Definizione

Il valore assoluto di un numero reale x è indicato con la notazione $|x|$ ed è definito:

$$|x| = \begin{cases} x \quad se \quad x \geq 0 \\ -x \quad se \quad x < 0 \end{cases}$$

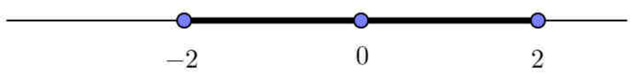
Quindi $|x|$ è sempre positivo o nullo.

Per esempio: $|5| = 5$; $|-3| = -(-3) = +3$

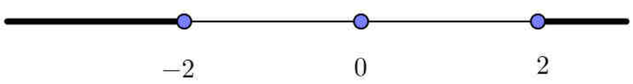
Esempio 1: se abbiamo $|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \cup x = 2$

Esempio 2: se abbiamo $|x| < 2$ vuol dire che $-2 < x < 2$

Esempio 3: se abbiamo $|x| > 2$ vuol dire che $x < -2 \cup x > 2$



Tutti i numeri reali compresi tra -2 e 2 hanno valore assoluto minore di 2.



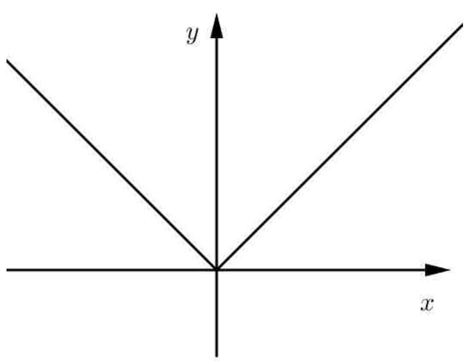
Tutti i numeri reali "esterni" all'intervallo [-2;2] cioè $x < -2$ oppure $x > 2$ hanno valore assoluto maggiore di 2.

Il grafico di $y = |x|$

Come risulta il grafico della funzione $y = |x|$?

Abbiamo:

$$y = \begin{cases} x \quad se \quad x \geq 0 \\ -x \quad se \quad x < 0 \end{cases}$$



Abbiamo quindi il grafico della retta $y = x$ quando $x \geq 0$ unito con il grafico della retta $y = -x$ quando $x < 0$. Otteniamo un grafico con uno "spigolo" e $x = 0$ viene detto "punto angoloso".

Equazioni con valori assoluti

Esempio 1: come si può risolvere l'equazione $|x-1|=2$?

È chiaro che ci sono due casi:

$$x-1=2 \Rightarrow x=3 \text{ oppure } x-1=-2 \Rightarrow x=-1$$

Esempio 2: come si può risolvere $|x-1|=-2$?

In questo caso non c'è nessuna soluzione poiché il valore assoluto è sempre positivo o nullo e non può essere uguale a -2.

Esempio 3: consideriamo l'equazione $|x-1|=2x+3$.Ci sono due casi:

se $x-1 \geq 0 \Rightarrow x-1=2x+3$

se $x-1<0 \Rightarrow -(x-1)=2x+3$

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1=2x+3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)=2x+3 \Rightarrow -x+1=2x+3 \Rightarrow 3x=-2 \end{cases}$$

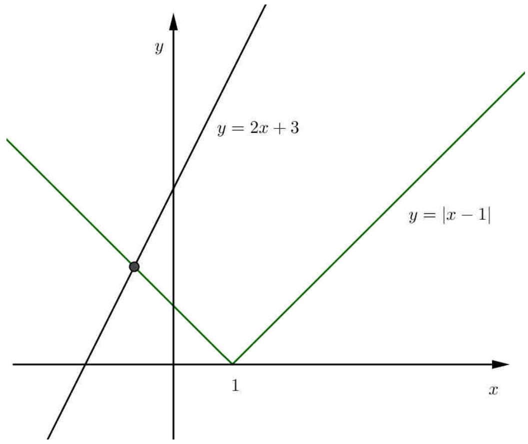
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x=-4 \end{cases} \cup \begin{cases} x<1 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi poiché $x=-4$ non è maggiore o uguale a 1 la soluzione non è accettabile e abbiamo solo $x=-\frac{2}{3}$ come soluzione dell'equazione ($-\frac{2}{3}<1$).

NOTA

Possiamo risolvere graficamente l'equazione data pensando di intersecare il grafico di $y=|x-1|$ con il grafico di $y=2x+3$.

$$y=\begin{cases} x-1 & se \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & x<1 \end{cases}$$



Si osserva che l'unica intersezione si trova tra $y=-x+1$ e $y=2x+3$ e che

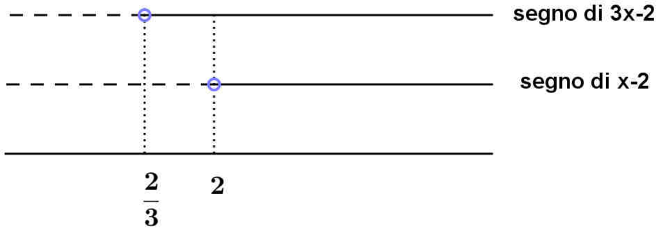
$$-x+1=2x+3 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

Esempio 4: come si risolve $|x-2| = |3x-2|$?

Studiamo i segni di $x-2$ e $3x-2$:

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$



Quindi
$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ -(x-2) = -(3x-2) \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ -(x-2) = 3x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x-2 = 3x-2 \end{cases}$$

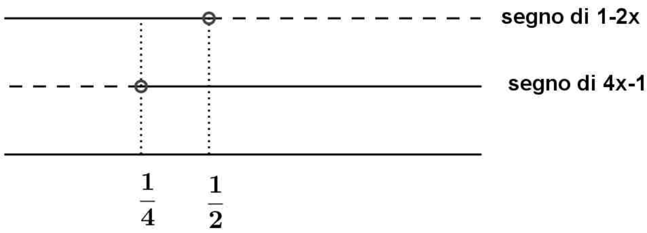
$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{2}{3} < x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \quad non \quad accettabile \end{cases}$$

Quindi ho soluzioni: $x = 0 \quad e \quad x = 1$

Esempio 5: risolviamo $|4x-1| - |1-2x| = 4x-2$

$$4x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ -(4x-1) - (1-2x) = 4x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ 4x-1-(1-2x) = 4x-2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 4x-1+1-2x = 4x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{3} \quad non \quad acc. \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2} \\ x = 0 \quad non \quad acc. \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Quindi ho solo la soluzione $x = 1$.

Esempio 6: risolviamo $|x-1| + |x-2| = 3x$.

Studiamo il segno di $x-1$ e $x-2$ e impostiamo i sistemi:…..

L'unica soluzione accettabile è $x = \frac{3}{5}$.

Disequazioni con il valore assoluto

Esempio 1: consideriamo per esempio $|x-2|>1$

Dovrà essere $x-2<-1 \cup x-2>1$ (ricorda che $|x|>a \Leftrightarrow x<-a \cup x>a$)

Quindi avremo

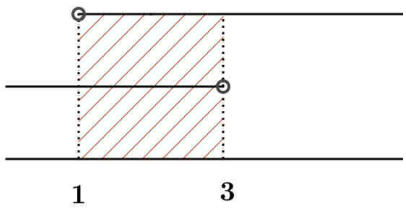
$$\begin{array}{ccc} x-2<-1 & \cup & x-2>1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x<1 & \cup & x>3 \end{array}$$

Esempio 2: come si risolve $|x-2|<1$?

Ricordando che $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ abbiamo: $-1<x-2<1$

Quindi

$$\begin{cases} x-2<1 \\ x-2>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>1 \end{cases}$$



Intersechiamo le soluzioni delle due disequazioni.
Otteniamo alla fine: $1<x<3$

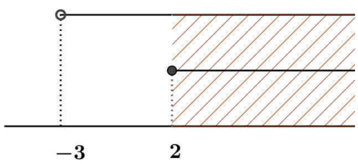
Esempio 3: come si risolve $|x-2|<-3$?

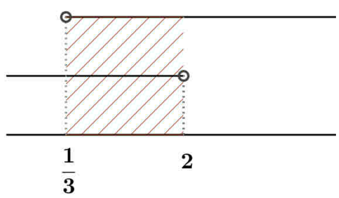
È chiaro che non ci sono soluzioni poiché il valore assoluto è sempre maggiore o uguale a zero e non può essere minore di -3.

Esempio 4: come si risolve $|x-2|<2x+1$?

Dobbiamo distinguere due casi, a seconda del segno di $x-2$:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2<2x+1 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2<0 \\ -(x-2)<2x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x>-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2<0 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$





$$x \geq 2 \quad \cup \quad \frac{1}{3}<x<2 \quad \rightarrow \quad x>\frac{1}{3}$$

Nota: se nella disequazione sono presenti più valori assoluti si procede in modo analogo a quanto visto nel caso delle equazioni.

Esercizi

1. Risolvi le seguenti equazioni contenenti valori assoluti:

a) $|3-x|=4$ [-1;7]

b) $|1+x|=2x$ [1]

c) $|3-4x|=x-1$ [impossibile]

d) $5x-|1-2x|=x+1$ [$\frac{1}{3}$]

e) $|x|=|3x+4|$ [-2;-1]

f) $|2x-5|=x-2$ [3;$\frac{7}{3}$]

g) $|3-x|-|7-2x|=4+2x$ [-8]

h) $|3-2x|+|5-x|=7-2x$ [$\frac{5}{3}$; 1]

2. Risolvi le seguenti disequazioni di primo grado contenenti valori assoluti:

a) $|5-2x|>4+x$ [$x<\frac{1}{3}\cup x>9$]

b) $|3+2x|<4x+1$ [$x>1$]

c) $|x-4|\le 1+|x|$ [$x\ge\frac{3}{2}$]

d) $|3-2x|-x<|x|$ [$x>\frac{3}{4}$]

e) $|5-x|\ge 7-x$ [$x\ge 6$]

f) $|x+2|\ge\frac{1}{2}x+3$ [$x\le-\frac{10}{3}\cup x\ge 2$]

g) $|4x+1|\le|2x+1|$ [$-\frac{1}{3}\le x\le 0$]

h) $|x+1|<|2x-4|$ [$x<1\cup x>5$]

Esercizi di ricapitolazione
(disequazioni)

1) Risolvi le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x-1}{3}+\frac{5-x}{2}<x-1$ [$x>\frac{19}{7}$]

b) $(x-2)\cdot(x^2-2x+1)<0$ [$x<2, \quad x\neq 1$]

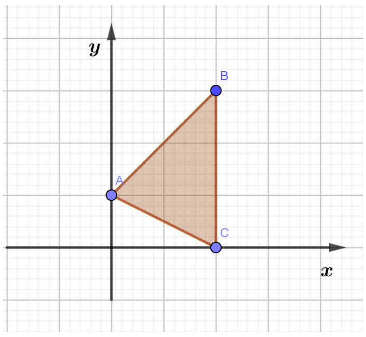
c) $\frac{2}{x-4}-\frac{1}{16-x^2}<0$ [$x<-\frac{9}{2} \quad \cup \quad -4<x<4$]

d) $(x+3)\cdot(1-x^2)>0$ [$x<-3 \quad \cup \quad -1<x<1$]

2) a) Disegna nel piano (x;y) la zona corrispondente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2x-y>0 \\ 4-y>0 \\ x-3y<0 \\ x-5<0 \end{cases}$$

b) Determina il sistema di disequazioni che individua la zona rappresentata in figura:



$A(0;1), \quad B(2;3), \quad C(2;0)$

[$\begin{cases} y<x+1 \\ y>-\frac{1}{2}x+1 \\ x<2 \end{cases}$]

3) Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni contenenti valori assoluti e interpreta graficamente il risultato:

a) $|x-1|=3x-4$ [$x=\frac{3}{2}$]

b) $|x+2|<|1-x|$ [$x<-\frac{1}{2}$]

4) Per noleggiare un auto si può scegliere tra due tipi di contratto:
contratto A: 100 euro di costo fisso e 0,2 euro per ogni Km percorso;
contratto B: 50 euro di costo fisso e 0,25 euro per ogni Km percorso.
In quali casi conviene il contratto B?

[indicando con x il n° di Km percorsi, $x<1000$]