La scomposizione dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore.

Esempio: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

Osserviamo che l'uguaglianza, letta da destra verso sinistra, è il prodotto notevole $(A+B)(A-B)$.

Metodi per la scomposizione di un polinomio

- **Raccoglimento a fattor comune**

Esempio: $3x^2 - 2x = x(3x-2)$
$4x^3 - 2x^2 + 8x = 2x(2x^2 - x + 4)$

Quindi se in tutti i termini di un polinomio è contenuto lo stesso fattore (che può essere anche un numero) si può *"raccogliere"* questo fattore comune (si dice anche "*mettere in evidenza*")

- **Raccoglimento parziale**

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x - 4 =$ raccogliamo x^2 tra i primi due termini e il numero 4 tra il 3° ed il 4° termine

$= x^2(x-1) + 4(x-1) =$ possiamo raccogliere $(x-1)$

$= (x-1)(x^2+4)$

Osservazione: è come percorressimo all'indietro i passaggi per la moltiplicazione di due polinomi.

NOTA: perché questo metodo funzioni è essenziale che dopo il primo raccoglimento si possa ancora raccogliere.

Esempio: $x^3 - x^2 + 4x + 4 = x^2(x-1) + 4(x+1)$ … non funziona!

Esercizi

(raccoglimento a fattor comune, raccoglimento parziale)

Scomponi i seguenti polinomi:

1) $3x+6y$; a^3x-a^3y ; x^3+4x

2) $8a^4-4a^3+2a^2$; $3xy+6x^2-9y^2$; a^2b-ab

3) $2ab-4a^2$; $\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a$; $2ax-4a+2a^2$

4) $5x-10xy+15y$; $-27a^2+9ay-18a$; $-6a^3+9a^2b+3a^2$

5) $(x+3y)-(x+3y)^2$; $(a-b)^2-(a-b)$; $(2x-3y^2)^3+(2x-3y^2)^2$

6) $5ay-y-5a+1$ [$(5a-1)(y-1)$]

7) $x^2y^2+1+x^2+y^2$ [$(x^2+1)(y^2+1)$]

8) $3a^2b-2a+12ab-8$ [$(3ab-2)(a+4)$]

9) $x^3+12x^2+6x+72$ [$(x+12)(x^2+6)$]

10) $5ax+2ay+5bx+2by$ [$(5x+2y)(a+b)$]

11) $ay-by-b+a$ [$(a-b)(y+1)$]

12) $(a+b)^2-ax-bx$ [$(a+b)(a+b-x)$]

13) $ay-4a-3y+12$ [$(y-4)(a-3)$]

14) $2ax+4x-3a-6$ [$(a+2)(2x-3)$]

15) $a^2bx+a^2b+bxy^2+by^2$ [$b(x+1)(a^2+y^2)$]

16) $x^4+4x^2-x^3y-4xy$ [$x(x^2+4)(x-y)$]

• Scomposizioni collegate ai prodotti notevoli

Esempio: $x^2-4=(x+2)(x-2) \qquad \leftarrow \qquad A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$9x^2-1=(3x+1)(3x-1)$

$4a^2-b^2=(2a+b)(2a-b)$

Esempio: $x^2+2x+1=(x+1)^2 \qquad \leftarrow \qquad A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$

$x^2-2x+1=(x-1)^2 \qquad \leftarrow \qquad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$

$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$

$9b^2-6b+1=(3b-1)^2$

$25x^2-10xy+y^2=(5x-y)^2$

Esempio: $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2 \qquad \leftarrow \qquad (A+B+C)^2=...$

$x^2+y^2+4+2xy+4x+4y=(x+y+2)^2$

$4a^2+b^2+1+4ab+4a+2b=(2a+b+1)^2$

Esempio: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3 \qquad \leftarrow \qquad (A+B)^3=...$

$8a^3-12a^2+6a-1=(2a-1)^3$

NOTA: differenza di cubi, somma di cubi

$$\boxed{A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)}$$

Infatti $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+\underline{A^2B}+\underline{\underline{AB^2}}-\underline{A^2B}-\underline{\underline{AB^2}}-B^3=A^3-B^3$

Quindi per esempio: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Analogamente $\boxed{A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)}$

Quindi per esempio: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Esempi

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$8a^3+1=(2a+1)(4a^2-2a+1)$

$8a^3-1=(2a-1)(4a^2+2a+1)$

Esercizi
(scomposizione con prodotti notevoli)

1) x^2-49y^2 ; $9-a^2b^2$

2) $4x^2-9y^2$; $25a^6b^8-\frac{1}{4}$

3) $81-a^2$; $16x^2-a^4$

4) x^4-y^4 [$(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$]

5) $5z^2-5$; x^3-9xy^2 ; $25a^5b^3-a^3b$

6) $a^2x-b^2x+a^2y-b^2y-a^2+b^2$ [$(a+b)(a-b)(x+y-1)$]

7) $(3a-x)^3-4(3a-x)$ [$(3a-x)(3a-x+2)(3a-x-2)$]

8) $4a^3-4a^2-4a+4$ [$4(a-1)(a-1)(a+1)$]

9) $9b-18-(b^2-4)$ [$(b-2)(7-b)$]

10) $9x^2+6x+1$; $a^2+4ab+4b^2$

11) y^2-6y+9 ; $4+9b^2-12b$

12) x^2-4x+4 ; $25x^2-60x+36$

13) $4a-4a^2-1$; $9y^2+\frac{1}{4}-3y$

14) $4a^2+4ab+b^2-c^2$ [$(2a+b+c)(2a+b-c)$]

15) $25x^2-y^2-10x+1$ [$(5x-1+y)(5x-1-y)$]

16) $a^2-x^2+2xy-y^2$ [$(a-x+y)(a+x-y)$]

17) a^2-4b-b^2-4 [$(a+b+2)(a-b-2)$]

18) $27x^3+27x^2+9x+1$ $[(3x+1)^3]$

19) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$ $[(a-2b)^3]$

20) $-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$ $[(b-a)^3]$

21) $x^6+1+3x^4+3x^2$ $[(x^2+1)^3]$

22) $8a^3+b^3$; $\frac{8}{27}a^3-1$

23) $27x^3-1$; $125a^3+8b^3$

24) x^3+27 ; a^3b^3+1

25) $24x^7-3x$ $[3x(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)]$

26) $2x^9+x^6-2x^3-1$ $[(2x^3+1)(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)]$

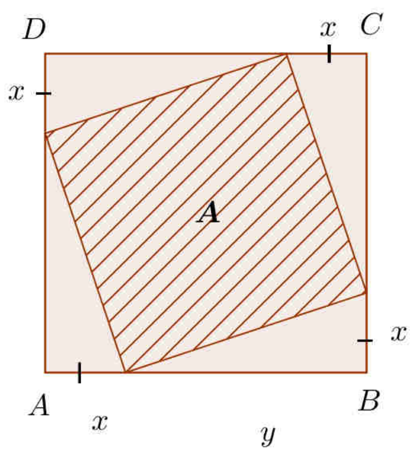
27) $2a^2+2b^2+12a+12b+4ab+18$ $[2(a+b+3)^2]$

28) x^4+2x^3-x-2 $[(x-1)(x+2)(x^2+x+1)]$

29) $x^3-2x^2-9x+18$ $[(x+3)(x-3)(x-2)]$

30) $5x^4y^4-10x^2y^2+5$ $[5(xy+1)^2(xy-1)^2]$

31) Determina l'area del quadrato in figura come differenza tra l'area *A* del quadrato ABCD e le aree dei triangoli:



$[A=x^2+y^2]$

• Scomposizione con il “teorema di Ruffini”

Consideriamo un polinomio contenente una sola lettera, per esempio

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

Se non riusciamo a scomporlo con i metodi considerati finora possiamo provare ad utilizzare il seguente teorema di Ruffini.

Teorema di Ruffini

Dato un polinomio $P(x)$, se sostituendo alla lettera x un valore a otteniamo zero, cioè se $P(a) = 0$, allora il polinomio è divisibile per $(x - a)$ e viceversa.

Dimostrazione

Supponiamo di dividere $P(x)$ per $x - a$: avremo $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$.

Sostituendo a x il valore a abbiamo $P(a) = R$ ma per ipotesi $P(a) = 0$ e quindi si ha che $R = 0 \Rightarrow P(x)$ è divisibile per x-a .

Viceversa se $P(x)$ è divisibile per $(x - a)$ vuol dire che $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ e quindi sostituendo alla lettera x il valore a otterrò come risultato zero

$$P(a) = \left(\underbrace{a - a}_{0} \right) \cdot Q(a) = 0$$

Nel nostro esempio abbiamo che

$$P(2) = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$$

e quindi $(x - 2)$ è un divisore di $P(x)$.

Eseguiamo la divisione

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +5x & -6 & x-2 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & 4x^2 & & & \underbrace{2x^2 - x + 3}_{Q(x)} \\
\cline{1-3}
// & -x^2 & +5x & -6 & \\
 & +x^2 & -2x & & \\
\cline{1-3}
 & // & +3x & -6 & \\
 & & -3x & +6 & \\
\cline{1-4}
 & & // & // & R = 0
\end{array}$$

Quindi $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3)$

NOTA*: ma come facciamo a sapere se esiste un numero intero* a *che annulla il polinomio?*

Se a **intero esiste, deve essere un divisore del termine noto di** $P(x)$**:** infatti se osserviamo l'ultimo passaggio della divisione dell'esempio, per avere *R=0* dovrà essere

$$a \cdot \text{numero} = \text{termine noto di } P(x)$$

e quindi a deve essere (se è intero) un divisore del termine noto del polinomio.

Nel nostro esempio quindi avremmo dovuto provare a sostituire alla lettera x i divisori di -6 cioè

$$\pm 1 \quad ; \quad \pm 2 \quad ; \quad \pm 3 \quad ; \quad \pm 6$$

Generalmente si parte da ± 1 e si va avanti con i divisori finché non si trova $a \,:\, P(a) = 0$.

Se nessun divisore annulla il polinomio vuol dire che non c'è a intero tale che $P(x)$ sia divisibile per $x - a$.

Esempio: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 6$

I divisori di -6 sono: $\pm 1 \;;\; \pm 2 \;;\; \pm 3 \;;\; \pm 6$

$P(1) = 1 - 2 - 1 - 6 \neq 0$
$P(-1) = -1 - 2 + 1 - 6 \neq 0$
$P(2) = 8 - 8 - 2 - 6 \neq 0$
$P(-2) = -8 - 8 + 2 - 6 \neq 0$
$P(3) = 27 - 18 - 3 - 6 = 0 \qquad !$

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6$ è divisibile per $x - 3$: possiamo eseguire la divisione per scomporre il polinomio:

$$
\begin{array}{llll|l}
x^3 & -2x^2 & -x & -6 & x-3 \\
\cline{5-5}
-x^3 & 3x^2 & & & \underbrace{x^2 + x + 2}_{Q(x)} \\
\cline{1-2}
// & x^2 & -x & -6 & \\
 & -x^2 & +3x & & \\
\cline{1-3}
 & // & +2x & -6 & \\
 & & -2x & +6 & \\
\cline{1-4}
 & & // & // & R = 0
\end{array}
$$

Quindi $x^3 - 2x^2 - x - 6 = (x-3)(x^2 + x + 2)$

Esercizi
(scomposizione con il teorema di Ruffini)

1) $5x^2 - 4x - 1$ [$(x-1)(5x+1)$]

2) $2x^2 + 3x - 2$ [$(x+2)(2x-1)$]

3) $2a^3 - a^2 - 5a - 2$ [$(a+1)(a-2)(2a+1)$]

4) $x^3 - x^2 - 3x - 9$ [$(x-3)(x^2 + 2x + 3)$]

5) $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ [$(b-1)(b+3)(2b+1)$]

6) $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ [$(b-1)(3b^2 - b + 4)$]

7) $x^3 - 3x - 2$ [$(x+1)^2(x-2)$]

8) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ [$(x-1)(x+2)(x-3)$]

9) $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$ [$x(x-1)(6x^2 + x - 1)$]

10) $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$ [$(y-4)(y-1)(y^2 + y - 1)$]

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE
Scomposizione dei polinomi

1. $4x^2+25-20x$ [$(2x-5)^2$]

2. $8x^3+27+36x^2+54x$ [$(2x+3)^3$]

3. $bx-ax+a-b$ [$(b-a)(x-1)$]

4. $27x^3+64$ [$(3x+4)(9x^2+16-12x)$]

5. $x^2-12x-13$ [$(x+1)(x-13)$]

6. $3ax+3xy+2a+2y$ [$(a+y)(3x+2)$]

7. $2a^4-2a^3-12a^2$ [$2a^2(a+2)(a-3)$]

8. $3a^3-2b^2+2a^2b-3ab$ [$(3a+2b)(a^2-b)$]

9. $10a^2-4ab+15a-6b$ [$(5a-2b)(2a+3)$]

10. x^3-2x^2+4x-3 [$(x-1)(x^2-x+3)$]

11. $8ab-ax+2a^2-4bx$ [$(4b+a)(2a-x)$]

12. $3x^5-81x^2$ [$3x^2(x-3)(x^2+3x+9)$]

13. $y-2-x^2y+2x^2$ [$(x+1)(1-x)(y-2)$]

14. $x^6-x^4+x^2-1$ [$(x+1)(x-1)(x^4+1)$]

15. $x^2-4x^2y+4xy^2-y^2$ [$(x-y)(x+y-4xy)$]

16. $(a+2)^2-1$ [$(a+1)(a+3)$]

17. $3x^4-12ax^2+12a^2$ [$3(x^2-2a)^2$]

18. $a^2(x+1)-2a(x+1)+x+1$ [$(x+1)(a-1)^2$]

19. $4a^4+4-8a^2$ [$4(a+1)^2(a-1)^2$]

20. $a^3-a^2b-ab-a$ [$a(a+1)(a-b-1)$]

21. $x^2 - y^2 - 3(x-y)^2$ [$2(2y-x)(x-y)$]

22. $x^6 + 16x^3 + 64$ [$(x+2)^2(x^2-2x+4)^2$]

23. $a^4(x^2+1) - 2a^4$ [$a^4(x+1)(x-1)$]

24. $x^3 + x^2y - x - y$ [$(x-1)(x+1)(x+y)$]

25. $7x^4 - 7$ [$7(x-1)(x+1)(x^2+1)$]

26. $-2xb^2 - 4xb - 2x$ [$-2x(b+1)^2$]

27. $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ [$x^3(x-5)^2$]

28. $2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2$ [$(x+y)(2+x+y)$]

29. $a^3 - 6a^2 - a + 30$ [$(a+2)(a-3)((a-5))$]

30. $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$ [$(x+y)^3(x-y)$]

31. $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ [$(x-2)^2(x-3)$]

32. $x^2 - 9 + 6a - a^2$ [$(x-a+3)(x+a-3)$]

33. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ [$(2x+1)^3$]

34. $3b^2 + b - 10$ [$(b+2)(3b-5)$]

35. $9x^2 - (x-5)^2$ [$(2x+5)(4x-5)$]

36. $x^3 + 27y^3$ [$(x+3y)(x^2+9y^2-3xy)$]

37. $\dfrac{x^4}{4} + x^2 + 1$ [$\left(\dfrac{1}{2}x^2+1\right)^2$]

38. $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$ [$(a-b-2c)^2$]

39. $a^4 - 5a^2 + 4$ [$(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$]

40. $\dfrac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$ [$\left(\dfrac{1}{2}a^2+1-b\right)\left(\dfrac{1}{2}a^2+1+b\right)$]

Problemi

1) Considera la somma di due numeri dispari consecutivi. Cosa osservi?
Puoi dimostrare che la somma di due numeri dispari consecutivi è sempre un multiplo di 4?

2) Considera la differenza tra il quadrato di un numero dispari e 1. Cosa osservi?
Come puoi dimostrare che il numero che si ottiene è divisibile per 8?

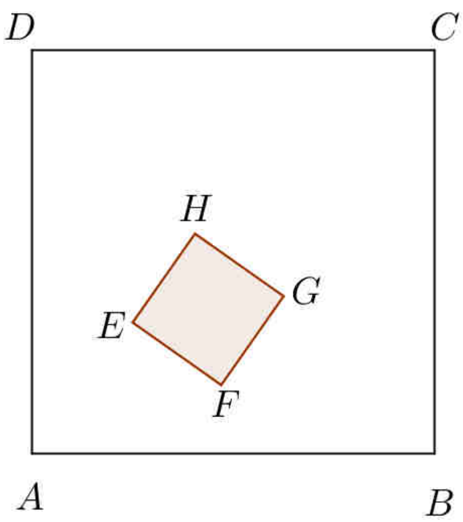
3) Il gioco "*Pensa un numero…*"
Il gioco è questo: si chiede a qualcuno di pensare un numero (intero) e poi gli si chiede di svolgere mentalmente queste operazioni:

- addiziona al numero 12
- moltiplica il risultato per 5
- sottrai 4 volte il numero pensato
- addiziona al risultato 40

Alla fine viene chiesto il risultato finale: sottraendo 100 da tale risultato si "indovina" il numero pensato in partenza.
Perché?
Prova a capirlo..
Suggerimento: indica con x il numero pensato e prova ad eseguire le operazioni indicate…

4) Un appezzamento di terreno è costituito da un quadrato ABCD e all'interno c'è uno stagno di forma quadrata EFGH.

Per recintare sia il perimetro esterno del terreno che il bordo dello stagno sono stati necessari 360m di rete; la recinzione di ABCD ha richiesto 280m di rete in più rispetto alla recinzione di EFGH. Qual è l'area della parte calpestabile dell'appezzamento?



$\left[6300m^2\right]$