Sistemi di primo grado

Problema
Un trapezio rettangolo di area 144 cm^2 ha altezza di 8 cm. Sapendo che il triplo della base minore è inferiore di 2 cm al doppio della base maggiore, determina le basi.

In questo caso non è facile risolvere il problema utilizzando una sola incognita: possiamo **usare due incognite** chiamando *x* la lunghezza della base maggiore e *y* la lunghezza della base minore.

Avremo quindi due relazioni, una relativa all'area del trapezio e l'altra ricavata dal testo del problema:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)\cdot 8}{2} = 144 \\ 3y = 2x - 2 \end{cases}$$

Poiché le due relazioni devono essere verificate entrambe mettiamo una parentesi graffa per indicare che sono "legate" tra loro: diremo che le due uguaglianze formano un sistema (di primo grado in due incognite).
Ma come possiamo a questo punto "risolvere" questo sistema di equazioni cioè **determinare i valori di *x* e di *y* che le soddisfano entrambe** ?

Innanzitutto nella prima equazione del sistema possiamo semplificare:

$$\begin{cases} \dfrac{(x+y)\cdot 8}{2} = 144 \quad \rightarrow \quad (x+y)\cdot 4 = 144 \quad \rightarrow x+y = 36 \\ 3y = 2x - 2 \end{cases}$$

Possiamo ricavare l'incognita *x* dalla prima equazione e sostituirla nella seconda equazione, continuare a sviluppare la seconda equazione (che contiene a questo punto solo l'incognita *y*) e ricavare il valore di y.

$$\begin{cases} x = 36 - y \\ 3y = 72 - 2y - 2 \quad \rightarrow 5y = 70 \quad \rightarrow y = 14 \end{cases}$$

A questo punto non ci rimane che sostituire il valore che abbiamo trovato di *y* nella prima equazione e determinare anche il valore dell'incognita *x* :

$$\begin{cases} x = 36 - 14 = 22 \\ y = 14 \end{cases}$$

In conclusioni le basi del trapezio misurano 22 cm e 14 cm.

Metodi di risoluzione di un sistema di primo grado in due incognite

Vediamo quindi i metodi con cui possiamo risolvere un sistema di primo grado in due incognite. Innanzitutto è opportuno svolgere eventualmente dei calcoli per portarlo nella forma cosiddetta "normale":

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Consideriamo per esempio il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)+2(y-1)=-\frac{1}{2}x-2 \\ 2(x-3)-(y+1)=x-6 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli per ricondurre il sistema a "forma normale":

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x-1+2y-2=-\frac{1}{2}x-2 \rightarrow x+2y-1=0 \\ 2x-6-y-1-x+6=0 \rightarrow x-y-1=0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

Vediamo alcuni metodi per risolverlo.

Metodo di sostituzione

- Come abbiamo fatto nel primo esempio considerato, ricaviamo una incognita dalla prima o dalla seconda equazione (in genere da quella in cui l'incognita si ricava più facilmente): ricaviamo per esempio la x dalla prima equazione

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

- Sostituiamo l'espressione trovata per la x nella seconda equazione e, svolgendo i calcoli, determiniamo la y

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ -2y+1-y-1=0 \Rightarrow -3y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

- Torniamo nella prima equazione e sostituiamo a y il valore trovato, determinando così il valore della x e quindi la soluzione del sistema $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Metodo del confronto

Consideriamo sempre il sistema

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

- Ricaviamo la stessa incognita da entrambe le equazioni, per esempio la x

$$\begin{cases} x=-2y+1 \\ x=y+1 \end{cases}$$

- Uguagliamo le due espressioni trovate e determiniamo la y ; riscriviamo inoltre una delle due equazioni

$$\begin{cases} -2y+1=y+1 \Rightarrow y=0 \\ x=y+1 \end{cases}$$

- Sostituiamo il valore trovato per la y nell'altra equazione e troviamo anche la x e quindi la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Metodo di riduzione
(*o di addizione e sottrazione***)**

Conviene utilizzare questo metodo quando un'incognita compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni (o con coefficienti opposti).

- Per esempio nel nostro caso abbiamo l'incognita x compare con lo stesso coefficiente nelle due equazioni: allora sottraiamo "membro a membro" le due equazioni ottenendo un'equazione equivalente che contiene però la sola incognita y

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y-1=0 \\ x-y-1\ \ =0 \end{cases} \\ \hline \ /\ \ 3y\ \ /\ \ =0 \end{array}$$

- Combiniamo l'equazione ottenuta con una delle due equazioni del sistema e sostituiamo il valore trovato per la y per determinare la x

$$\begin{cases} 3y=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Nota: se i coefficienti di un'incognita sono opposti si "sommano" membro a membro le equazioni in modo da eliminare un'incognita.

Sistemi di primo grado in due incognite nel piano cartesiano

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (O;x,y), *un'equazione di primo grado in x e y rappresenta una retta* cioè le coordinate (*x;y*) che verificano una data equazione di primo grado in *x* e *y* sono punti che appartengono ad una stessa retta.
Se per esempio ricaviamo la *y* da entrambe le equazioni del nostro sistema- esempio abbiamo:

$$r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$s: y = x - 1$$

Per disegnare le rette possiamo costruire per ciascuna equazione una tabella: assegniamo un valore alla *x* e determiniamo il corrispondente valore della *y* che si ottiene sostituendo il valore scelto per la *x* nell'equazione.

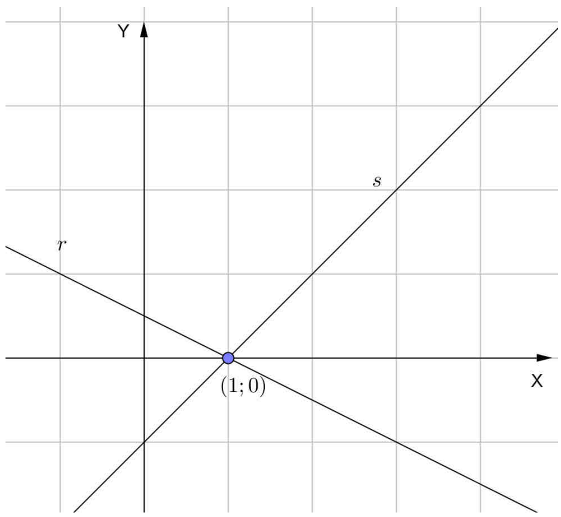
retta r

X	Y
1	0
-1	1

retta s

X	Y
1	0
0	-1

Naturalmente per ciascuna retta basta determinare due punti.
Avremo quindi:



Rappresentando le equazioni nel piano cartesiano risolvere un sistema di primo grado di due equazioni in due incognite corrisponde a cercare gli eventuali punti di intersezione delle due rette corrispondenti alle equazioni.

Nel nostro caso infatti le due rette sono incidenti e il loro punto di intersezione è proprio $(1;0)$.

Sistemi determinati, indeterminati, impossibili

Quante soluzioni può avere un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite ?

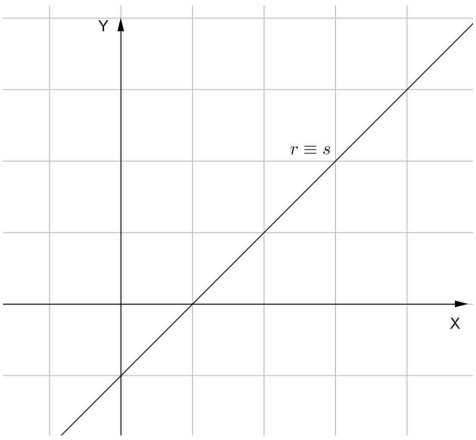
Abbiamo visto che un'equazione di primo grado in due incognite corrisponde ad una retta nel piano cartesiano e che risolvere un "sistema" equivale a cercare i punti "comuni" delle due rette associate alle equazioni del sistema.

Quindi possiamo avere tre casi:

- Le equazioni del sistema sono le equazioni di **due rette incidenti** (come nel nostro esempio) e quindi abbiamo un punto di intersezione cioè una soluzione $(x_0; y_0)$ del sistema che si dice "*determinato*";

- le equazioni del sistema sono praticamente la stessa equazione cioè sono equazioni della **stessa retta** e allora i punti sono tutti comuni, il sistema ha infinite soluzioni e si dice "*indeterminato*".

  Esempio

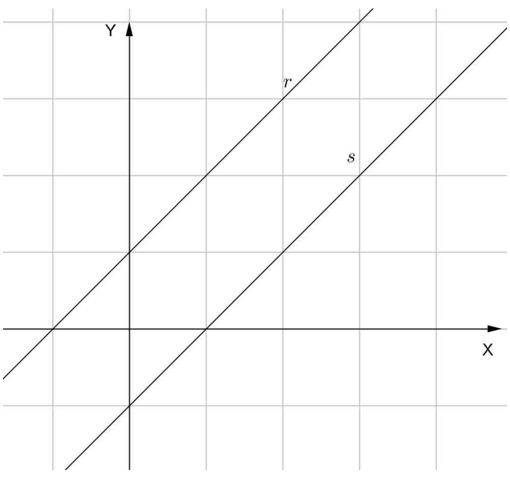


$$\begin{cases} r: 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Infatti se ricavo $x = y + 1$ dalla prima equazione e sostituisco nella seconda equazione trovo 0=0.

Tutti i punti della retta sono soluzioni del sistema.

- le equazioni del sistema sono le equazioni di due **rette parallele** e allora non c'è nessun punto "comune", quindi nessuna soluzione del sistema e il sistema si dice "*impossibile*".
  Esempio



$$\begin{cases} r: x - y + 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ y - 1 - y - 1 = 0 \rightarrow -2 = 0 \ \textit{impossibile} \end{cases}$$

Esercizi
(sistemi di equazioni di primo grado in due incognite)

1) $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ $[(6,3)]$

2) $\begin{cases} 5x+y=20 \\ 5x+7y=20 \end{cases}$ $[(4,0)]$

3) $\begin{cases} x-6y+5=3-7y+10+2x+2 \\ x+y=6-8 \end{cases}$ $[(-6,4)]$

4) $\begin{cases} 5(5x-2)=20x-2(y-3) \\ 2(x-5)-12y=21(1-y) \end{cases}$ $[(2,3)]$

5) $\begin{cases} (x+2)^2-3x+2y=9+x^2 \\ -5x+3(x-3)+x-y=-6 \end{cases}$ $[(-11,8)]$

6) $\begin{cases} x-2=\dfrac{y}{3}-1+\dfrac{x}{2} \\ \dfrac{5x+3y}{6}-3=\dfrac{2x-y}{4}+\dfrac{7}{12} \end{cases}$ $[(4,3)]$

7) $\begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{8}y=1 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{3},-4\right)\right]$

8) $\begin{cases} (x+2)^2-1=x^2-5y \\ 4x-1=-y \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2},-1\right)\right]$

9) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ 18x-6y=-1 \end{cases}$ [impossibile]

10) $\begin{cases} y-3x=1 \\ x-\dfrac{1}{3}y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ [indeterminato]

11) $\begin{cases} \frac{1}{3}(y+1)+y-3=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(x-y) \\ \frac{y-3-x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(x+1) \end{cases}$ $[(-1,3)]$

12) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ [indeterminato]

13) $\begin{cases} 1-4y-\frac{1}{3}x=0 \\ \frac{2}{3}x+8y=\frac{1}{2} \end{cases}$ [impossibile]

14) $\begin{cases} 3x+2(y-4)^2=36+2y^2-15y+2x \\ 3(y-1)+2\left[x-(x-1)^2\right]=-2-2x(x-2) \end{cases}$ $[(3,-1)]$

15) $\begin{cases} (x-2y)^2-(x-y)^2-y(3y-2x)=x+y-2 \\ \frac{2x-y}{3}-\frac{x+2y}{6}-\frac{x-y}{2}=0 \end{cases}$ $[(2,0)]$

16) $\begin{cases} 3y+24+(y-2)^2+4y=4x+y^2+4 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ $[(3,-4)]$

17) $\begin{cases} \frac{2}{3}y+\frac{1}{5}x=5 \\ 2x-\frac{5}{6}y+3=8 \end{cases}$ $[(5,6)]$

18) $\begin{cases} \frac{x+2y}{3}+1=\frac{1}{3} \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$ $[(2,-2)]$

19) $\begin{cases} \frac{3}{4}x+y=-2 \\ \frac{4}{5}y+x=2-\frac{x}{2} \end{cases}$ $[(4,-5)]$

20) $\begin{cases} \frac{4}{3}x+\frac{1}{2}y=-\frac{15}{4} \\ \frac{y-x}{2}-1=\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(-3,\frac{1}{2}\right)\right]$

21) $\begin{cases} (x-1)^2 - 3y = x^2 - 7 \\ \dfrac{3x-y}{2} + 3 = y + \dfrac{3}{2} \end{cases}$ $\quad [(1,2)]$

22) $\begin{cases} \dfrac{2x+4y}{3} + \dfrac{1}{2}x + 1 = 0 \\ 2(5+2x-y) + \dfrac{x+2y}{3} = 0 \end{cases}$ $\quad [(-2,1)]$

23) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{16} - \dfrac{x-y}{4} = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$ $\quad [(3,5)]$

24) $\begin{cases} (x-2)(x+2) + y = (1-x)^2 \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+2}{2} = 0 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\dfrac{19}{8}, \dfrac{1}{4}\right)\right]$

25) Disegna nel piano cartesiano le rette aventi le seguenti equazioni ed indica come risultano

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ [incidenti in $P\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{4}\right)$]

b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$ [incidenti in $P\left(-\dfrac{2}{5}; -\dfrac{1}{5}\right)$]

c) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ [rette parallele, sistema impossibile]

d) $\begin{cases} 2(x-3) + y + 5 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$ [rette coincidenti, sistema indeterminato]

e) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ [rette incidenti in $P(2;3)$]

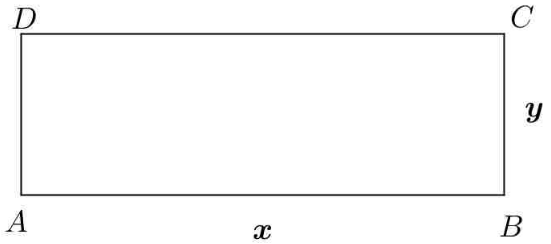
f) $\begin{cases} y = 3 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$ [rette incidenti in $P\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$]

Problemi di geometria

1. **Esempio**

Un rettangolo ha il perimetro di 48 cm. Sapendo che il doppio dell'altezza è i $\frac{2}{3}$ della base, quali sono le lunghezze della base e dell'altezza?

Indichiamo con x la base e con y l'altezza.



Avremo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x+2y=48 \\ 2y=\frac{2}{3}x \end{cases} \begin{cases} x+y=24 \rightarrow x+\frac{1}{3}x=24 \rightarrow \frac{4}{3}x=24 \rightarrow x=18 \\ y=\frac{1}{3}x \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} x=18 \\ y=6 \end{cases}$

2. In un rettangolo il perimetro è 80 cm. La base supera l'altezza di 10 cm. Trova le dimensioni del rettangolo.

$[25cm, 15cm]$

3. Calcola la lunghezza delle diagonali di un rombo sapendo che la somma di $\frac{1}{10}$ della maggiore e di $\frac{1}{9}$ della minore è 19 cm e che, diminuendo la maggiore di 10 cm e aumentando di 9 cm la minore le due diagonali diventano congruenti.

$[100cm, 81cm]$

4. Calcola la lunghezza della diagonale di un rettangolo sapendo che il perimetro è 14 cm e che l'altezza supera la base di 1 cm.

$[5cm]$

5. Calcola le lunghezze delle basi di un trapezio sapendo che l'area è 32 cm^2, l'altezza è 4 cm e la differenza delle basi è 4 cm.

$$[10cm, 6cm]$$

6. In un rombo la somma delle diagonali è 34 cm, i $\frac{3}{4}$ della maggiore superano di 8 cm la minore. Determina il perimetro del rombo.

$$[52cm]$$

7. Calcola l'area di un triangolo sapendo che i $\frac{3}{5}$ dell'altezza sono 54 cm e che il doppio della base supera di 46 cm l'altezza.

$$[3060cm^2]$$

8. Il perimetro di un rettangolo è 94 cm e la base supera di 11 cm il doppio dell'altezza. Calcola l'area.

$$[420cm^2]$$

9. Calcola l'area di un trapezio rettangolo sapendo che il lato obliquo è 10 cm, che la base maggiore è il triplo della minore e che la somma delle basi è 16 cm.

$$[48cm^2]$$

10. Determina il perimetro di un trapezio isoscele sapendo che la sua area è 52 cm^2, che la base maggiore supera di 6 cm la base minore e che l'altezza è 4 cm.

$$[36cm]$$

11. L'area di un trapezio rettangolo è 72 cm^2. La somma delle basi è 24 cm e la loro differenza è 8 cm. Determina il perimetro.

$$[40cm]$$

12. In un trapezio isoscele gli angoli alla base sono di 60° e il perimetro è 35 cm. Sapendo che la base maggiore è $\frac{3}{2}$ della minore, calcola le misure dei lati del trapezio.

$$[10cm, 15cm, 5cm, 5cm]$$

13. Sappiamo che la somma delle diagonali di un rombo è 66 cm e che la loro differenza è 18 cm. Calcola l'area del rombo.

$$[504cm^2]$$

14. Il perimetro di un trapezio isoscele è 72 cm. Calcola l'area del trapezio sapendo che il lato obliquo è uguale alla metà della base minore e che la somma dei $\frac{3}{8}$ della base maggiore con il lato obliquo è 22 cm.

$$[208cm^2]$$

15. Calcola l'area di un trapezio isoscele sapendo che le basi differiscono di 6 cm, che la base maggiore è uguale al doppio della minore diminuito di 3 cm e che il lato obliquo è 5 cm.

[$48cm^2$]

16. Calcola le lunghezze dei lati di un rettangolo sapendo che il maggiore supera di 4 cm il minore e che, aumentando di 2 cm il maggiore e diminuendo di 1 cm il minore, l'area del rettangolo diminuisce di 2 cm^2.

[8 cm; 4 cm]

17. Calcola il perimetro di un rombo sapendo che le sue diagonali differiscono di *2a* e che la loro semisomma è il doppio della minore diminuito di *5a*.

[*20a*]

18. Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le due dimensioni sono tali che la loro somma è 10 cm e che, aggiungendo 1 cm alla minore e togliendo 1 cm dalla maggiore, si ottiene un quadrato.

[24 cm^2; 20 cm]

19. In un rombo la diagonale maggiore supera la minore di 6 cm e la somma tra i $\frac{3}{7}$ della maggiore e $\frac{1}{3}$ della minore è 30 cm. Determina le diagonali.

[36 cm; 42 cm]

20. In un trapezio rettangolo la somma delle basi misura *10a* e la semidifferenza delle lunghezze delle basi è $\frac{2}{3}$ della base minore. Sapendo inoltre che l'altezza è uguale alla base minore determina il perimetro del trapezio.

[*18a*]