

Le equazioni di primo grado

Definiamo prima di tutto cosa è una identità.

Definizione : *un'identità è un'uguaglianza, dove compaiono espressioni letterali, verificata per qualunque valore attribuito alle lettere.*

Esempi

Sono identità:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$4 \cdot (a+b) = 4a + 4b$$

A volte, per stabilire se una data uguaglianza rappresenta un'identità, occorre eseguire alcuni calcoli.

Per esempio:

$$4a \cdot (a+b) = (a+2b)^2 + 3a^2 - 4b^2$$

è un'identità ?

Sviluppiamo il primo membro (espressione a sinistra) e otteniamo

$$4a \cdot (a+b) = 4a^2 + 4ab$$

Sviluppiamo il secondo membro (espressione a destra) e otteniamo

$$(a+2b)^2 + 3a^2 - 4b^2 = a^2 + 4ab + \cancel{4b^2} + 3a^2 - \cancel{4b^2} = 4a^2 + 4ab$$

Quindi si tratta di un'identità.

Nota

Se nelle espressioni compaiono delle frazioni algebriche, dovremo precisare le condizioni di esistenza.

Esempio

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a-1} = \frac{2}{a-1} \quad \text{è un'identità con C.E. } a \neq 1$$

Vediamo ora come è definita un'equazione.

Definizione : un'equazione è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire a una o più lettere che rendano vera l'uguaglianza.

Nota

La parola “*equazione*” deriva dal verbo latino “*aequare*” che significa “**rendere uguale**”.

Noi studieremo equazioni con una sola lettera, chiamata incognita, e di primo grado.

Per esempio

$$2x + 1 = 3x - 2$$

è un'equazione di primo grado nell'incognita x

La parte dell'uguaglianza a sinistra dell'uguale viene chiamata 1° membro dell'equazione e la parte a destra dell'uguale viene detta 2° membro dell'equazione.

I valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **soluzioni** (o radici) dell'equazione.

Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni.

Per esempio $2x + 1 = 3x - 2$ ha come soluzione $x = 3$.

Infatti se sostituiamo alla lettera x il valore 3 otteniamo:

$$2 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot 3 - 2$$

$$7 = 7$$

Nota importante

Un'equazione può avere soluzione in un dato insieme numerico, ma non avere soluzione in un insieme numerico più ristretto.

Per esempio l'equazione $2x = 1$ ha come soluzione $x = \frac{1}{2}$ nell'insieme $\mathbb{R}$ ma non avrebbe soluzione nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Noi considereremo come insieme numerico di riferimento l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Principi di “equivalenza” per risolvere un’equazione

Per risolvere un’equazione dobbiamo trasformarla in un’equazione “*equivalente*” via via più semplice, cioè con le stesse soluzioni dell’equazione di partenza, fino ad arrivare alla soluzione.

Vediamo come si può ottenere un’equazione equivalente.

Primo principio di equivalenza

Se si addiziona ad entrambi i membri di un’equazione uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un’equazione equivalente.

Applicazione del primo principio

Esempio: consideriamo l’equazione

$$x - 1 = 2$$

Se sommiamo +1 a entrambi i membri avremo:

$$x \cancel{-1} + \cancel{1} = 2 + 1$$

Quindi semplificando troviamo la soluzione

$$x = 3$$

Regola del “trasporto”

Nel procedimento precedente è come se avessimo trasportato -1 da sinistra a destra, ma cambiandolo di segno

$$\begin{array}{l} x \ominus 1 = 2 \\ x = 2 + 1 \end{array} \quad \searrow$$

Abbiamo quindi trovato una regola che possiamo chiamare del “**trasporto**”: *data un’equazione se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all’altro **cambiandolo di segno**.*

Nota

Il termine “algebra” deriva dal termine arabo “*al-jabr*”, usato dal matematico al- Khuwarizmi (IX sec. d.C.) proprio per indicare la regola del trasporto.

Secondo principio di equivalenza

Se si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero (o una stessa espressione) diverso da zero, si ottiene un'equazione equivalente.

Applicazione del 2° principio

Esempio: consideriamo l'equazione

$$2x = 1$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri per $\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{1}{2}$$

Quindi se l'equazione è ridotta nella forma $ax = b$, con $a \neq 0$, utilizzando il secondo principio di equivalenza possiamo ricavare $x = \frac{b}{a}$ cioè dividiamo il termine noto b per il coefficiente dell'incognita a .

Altre applicazioni dei due principi di equivalenza

- *Se in un'equazione sono presenti termini uguali nei due membri, possono essere cancellati*

Esempio: $x + 1 = 2x + 1$

Aggiungendo -1 ad entrambi i membri possiamo cancellare

$$x + \cancel{1} - \cancel{1} = 2x + \cancel{1} - \cancel{1}$$

- *Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico in comune (diverso da zero), possiamo dividere tutti i termini per quel fattore*

Esempio: $3x + 6 = 9x + 3$

Dividendo entrambi i membri per 3 abbiamo

$$\frac{3x+6}{3} = \frac{9x+3}{3} \Rightarrow x+2 = 3x+1$$

- *Cambiando segno a tutti i termini di un'equazione si ottiene un'equazione equivalente perché cambiare segno equivale a moltiplicare per -1*

Esempio: $-x - 2 = -5$ è equivalente a $x + 2 = 5$

Osservazione : il secondo principio viene utilizzato anche per “eliminare” i denominatori nei coefficienti di un'equazione.

Esempio : consideriamo l'equazione $\frac{x}{2} = x + \frac{5}{3}$

Riduciamo i due membri allo stesso denominatore (m.c.m. denominatori):

$$\frac{3x}{6} = \frac{6x+10}{6}$$

Applichiamo il secondo principio moltiplicando per 6 :

$$6 \cdot \frac{(3x)}{6} = \frac{(6x+10)}{6} \cdot 6 \Rightarrow 3x = 6x + 10$$

Risoluzione di un'equazione di 1° grado (numerica intera)

Esempio 1

Consideriamo la seguente equazione

$$4x - 9 + (x - 1) \cdot (x + 1) = (x - 3)^2 + 2x + 5$$

Inizialmente dobbiamo sviluppare i calcoli:

$$4x - 9 + x^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 + 2x + 5$$

Operando alcune semplificazioni e somme abbiamo:

$$4x - 10 = -4x + 14$$

Trasportiamo $-4x$ al primo membro e -10 al secondo (cambiandoli di segno) e sommiamo ottenendo:

$$8x = 24$$

In conclusione ricaviamo l'incognita applicando il secondo principio di equivalenza:

$$x = \frac{24}{8} \Rightarrow x = 3$$

Abbiamo quindi ottenuto una soluzione e l'equazione si dice “**determinata**”.

Nota: possiamo sempre verificare l'esattezza della soluzione sostituendola nell'equazione iniziale: se otteniamo un'identità la soluzione è corretta.

Esempio 2

Consideriamo la seguente equazione

$$4x - 12 - 3x = 5 + x - 17$$

Sviluppando i calcoli abbiamo

$$x - 12 = x - 12$$

$$0 \cdot x = 0$$

In questo caso quindi **l'equazione ha infinite soluzioni** perché qualunque valore dell'incognita verifica l'uguaglianza (si tratta quindi di un'identità).

L'equazione si dice “**indeterminata**”.

Esempio 3

Consideriamo la seguente equazione

$$2(x - 1) - 2x = 0$$

Sviluppando i calcoli abbiamo:

$$2x - 2 - 2x = 0$$

$$0 \cdot x - 2 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 2$$

Non c'è nessun valore dell'incognita che verifichi questa uguaglianza e quindi **l'equazione non ha nessuna soluzione** e viene detta “**impossibile**”.

Ricapitolando

Utilizzando i due principi di equivalenza, un'equazione numerica intera di 1° grado si può sempre trasformare in un'equazione equivalente scritta nella forma

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & ax = b \\ & \text{coefficiente dell'incognita} & \nwarrow \\ & & \text{termine noto} \end{array}$$

Abbiamo tre casi:

- Se $a \neq 0$ allora, usando il 2° principio, avremo $x = \frac{b}{a}$ e l'equazione è determinata;
- Se $a = 0$
 - se anche $b = 0$ allora abbiamo $0 \cdot x = 0$, equazione indeterminata, cioè con infinite soluzioni
 - Se $b \neq 0$, poiché abbiamo $0 \cdot x = b (\neq 0)$, l'equazione è impossibile, cioè non ha soluzioni

Altri esempi

1) $\frac{1}{2}x - 2x + 3 = \frac{1}{3}x + x + 1$

Spostiamo i termini contenenti l'incognita a sinistra (per esempio) e i numeri al secondo membro:

$$\frac{1}{2}x - 2x - \frac{1}{3}x = 1 - 3$$

Calcoliamo: $\frac{3x - 12x - 2x}{6} = -2 \rightarrow -\frac{11}{6}x = -2 \rightarrow x = 2 \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{11}$

2) $2(x - 3) - \frac{1}{2} = 3x - \frac{13}{2}$

Sviluppiamo il prodotto: $2x - 6 - \frac{1}{2} = 3x - \frac{13}{2}$

Possiamo spostare $2x$ a destra (cambiandolo di segno) perché in questo modo evitiamo di avere la x con segno negativo:

$$-\frac{13}{2} = 3x - 2x - \frac{13}{2}$$

In conclusione (eliminando $-\frac{13}{2}$) abbiamo $x = 0$.

Esercizi
(equazioni numeriche intere)

Risolvi le seguenti equazioni numeriche intere ed esegui la verifica di quelle che risultano determinate:

$$1) \quad 3x - 1 = 2x + 5 \quad ; \quad 4(1 - x) - 2x = 3x + 1 \quad \left[6 ; \frac{1}{3}\right]$$

$$2) \quad -6x + 7 = 7 - 6x \quad ; \quad 2x - 5 = x + 4 + x \quad [indeterm ; imposs.]$$

$$3) \quad 8x - 3 + 2x = 6x + 1 + 4x \quad ; \quad -3(x + 1) - 2 - 4x = 2 \quad [imposs. ; -1]$$

$$4) \quad \frac{1}{6}(x - 1) = 0 \quad ; \quad \frac{x}{4} - x = 0 \quad [1 ; 0]$$

$$5) \quad 8(x - 1) - 2(x + 3) = 3(2x - 1) - 5 - 17x \quad \left[\frac{6}{17}\right]$$

$$6) \quad (x - 2)^2 - 8 + x = x(x - 6) \quad \left[\frac{4}{3}\right]$$

$$7) \quad (2x + 1)(x - 3) - 2x = 2(x - 1)^2 + 1 \quad [-2]$$

$$8) \quad (x - 3)(x + 3) - [-(2 - x) + 5] = 2 + x(x + 1) \quad [-7]$$

$$9) \quad \frac{3}{5}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}x + \left(1 + \frac{2}{3}\right) \quad [3]$$

$$10) \quad \frac{x + 1}{3} - \frac{2(x - 1)}{5} + \frac{2}{3} = \frac{x - 4}{5} - \frac{4}{15}x \quad [imposs.]$$

$$11) \quad 3\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - (1 + x) + \frac{1}{3}\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \left[\frac{29}{4}\right]$$

$$12) \quad \frac{x + 1}{2} - 3x(x - 1) = \frac{-6(x - 1)(x + 1) - 5}{2} \quad [0]$$

$$13) \quad \frac{1}{3}(x - 3) - \left(\frac{x + 1}{3} - \frac{3 + x}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{2 - x}{3} + \frac{x}{3} + 1 \quad [-3]$$

$$14) \quad x + \frac{1 - 6x}{15} + 2 = \frac{3(1 - x)}{5} - \frac{2(x - 1)}{3} \quad \left[-\frac{3}{7}\right]$$

$$15) \quad x + \frac{x(x + 2)}{2} - \frac{1}{4}(1 - x)(2x + 1) = \frac{1}{2}(3x + 1) + x^2 \quad [3]$$

Appunti di Matematica 1
- Equazioni di primo grado -

- 16) $\frac{2}{3} \left[(2x-1)(x-4) + 3 \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + x \right) \right] = \frac{2}{3} (5x^2 - x) + \frac{14}{9}$ $\left[\frac{1}{6} \right]$
- 17) $\frac{2}{3} [(1-x)(1+x)] + \frac{4}{3} x^2 + 2 = \frac{2}{3} x(1+x) + \frac{1}{3} (x+4)$ $\left[\frac{4}{3} \right]$
- 18) $\left[\left(\frac{3}{4} - 3x \right) \left(\frac{4}{3} - 2x \right) \right] = 4x \left(3x + \frac{1}{2} \right) - \left(2x - \frac{3}{2} \right) \left(3x - \frac{1}{2} \right)$ $\left[\frac{7}{52} \right]$
- 19) $\frac{2x-1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} \left[x^2 + x \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{4} \left(x + \frac{2}{3} \right)$ $\left[-\frac{1}{13} \right]$
- 20) $\frac{1}{5} (x-11) - 2x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{4} x - 2 - x - \frac{1}{60} x$ $[1]$
- 21) $\frac{3x+2}{5} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{5} \left[x+2 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{3x+1}{10} + \frac{2}{3} x$ $[5]$
- 22) $\frac{1-2x}{2} - \frac{(1-4x)(1-2x)}{6} = \frac{5}{6} - \frac{(2x-1)^2}{3}$ $\left[-\frac{1}{8} \right]$
- 23) $\frac{1+x^2}{5} - \frac{1}{4} x - \frac{1}{20} = \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{3}{2} - 1$ $\left[\frac{11}{3} \right]$
- 24) $\frac{13}{48} + \frac{x}{2} - \frac{2x+1}{6} = 1 - \left(\frac{1}{4} - x \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$ $\left[\frac{1}{2} \right]$
- 25) $\left(2x - \frac{1}{3} \right)^2 + (2-x) \left(2x - \frac{1}{2} \right) - \frac{7}{6} x - 2x(x+1) = 0$ $[imposs.]$
- 26) $\frac{(2x+2)(1-x)}{3} = \frac{2(1-2x)^2 - 6(x-1)^2}{2} - \frac{5}{3} x^2$ $\left[\frac{4}{3} \right]$
- 27) $\frac{1}{3} (x-2)(x+2) - \frac{3x-2}{3} = \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{2-5x}{3}$ $\left[-\frac{9}{2} \right]$
- 28) $(x-2)^3 + (x+2)(x+1)(x-2) + 13x^2 = 2x(x+2)^2 - 12$ $[indet\ erm.]$

Problemi risolubili con equazioni

- 1) La somma di tre numeri consecutivi è 36. Determina i tre numeri. [11, 12, 13]
- 2) La somma di due numeri dispari consecutivi è 84. Determina i due numeri. [41, 43]
- 3) Determina due numeri sapendo che la loro somma è 43 e la loro differenza è 19. [31, 12]
- 4) Dividi il numero 35 in tre parti tali che la prima sia doppia della seconda e la seconda sia doppia della terza. [5, 10, 20]
- 5) Dividi il numero 50 in due parti tali che una sia $\frac{2}{3}$ dell'altra. [20, 30]
- 6) Determina due numeri naturali consecutivi tali che la differenza dei loro quadrati sia 13. [6, 7]
- 7) E' possibile distribuire 25 persone in due stanze in modo che nella prima ve ne siano il doppio che nella seconda? [no]
- 8) In un parcheggio ci sono scooter e automobili. Sapendo che le ruote sono 104 e che in tutto ci sono 36 veicoli, calcola il numero degli scooter e quello delle auto. [20, 16]
- 9) La distanza fra due località è stata percorsa da un autotreno in 9 ore, fra andata e ritorno, escluse le soste. Nell'andata la velocità media è stata di 56 km/h e nel ritorno di 70 km/h. Ricordando che $d = v t$, dove v è la velocità e t il tempo, quale è la distanza d fra le due località ? [280 km]
- 10) Considera un trapezio rettangolo ABCD in cui la differenza delle basi $AB-CD = 4$ e la base minore $CD = \frac{3}{5} AB$. Sapendo che il lato obliquo misura 5 cm, determina il perimetro del trapezio. [24 cm]

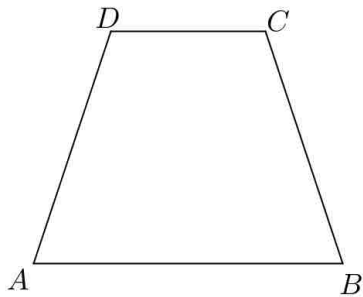
11)



Sapendo che $\overline{AB} = \frac{7}{4} \overline{BC}$ e che il perimetro è 11 cm, determina l'area del rettangolo ABCD.

[7 cm²]

12)



Nel trapezio isoscele ABCD

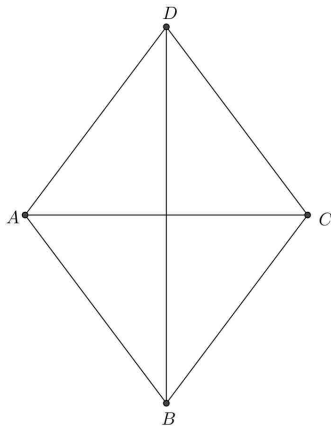
$$\overline{AB} = 2\overline{DC}$$

e il perimetro risulta 56 cm.

Sapendo inoltre che il lato obliquo misura 13 cm, determina l'area.

[180 cm²]

13)

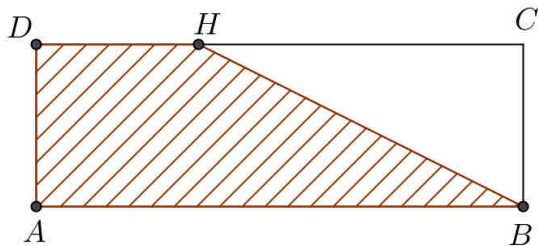


Nel rombo ABCD $\overline{BD} - \overline{AC} = 4$ cm e $\overline{BD} = \frac{4}{3} \overline{AC}$.

Determina 2p e area del rombo.

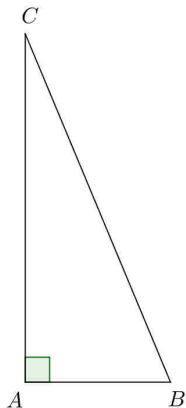
[40 cm, 96 cm²]

14) Se $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AD} = 2$ cm e $\text{area}(\text{ABHD}) = 2 \cdot \text{area}(\text{HBC})$, quanto misura DH ?



[2 cm]

15)



Nel triangolo rettangolo ABC il perimetro misura 60 cm e

$$\overline{AB} = \frac{5}{12} \overline{AC} \quad \text{Determina l'area.}$$

[120cm²]

- 16) In un rombo la somma delle due diagonali è 84 cm. Sapendo che la differenza tra la diagonale minore e $\frac{5}{12}$ della maggiore è 16 cm, determina perimetro e area del rombo.
[120 cm, 864 cm²]
- 17) Un trapezio rettangolo ha il perimetro di 108 cm e l'altezza è pari ai $\frac{4}{3}$ della proiezione del lato obliquo sulla base maggiore. Se la somma dell'altezza e della proiezione è 49 cm, trova l'area del trapezio.
[630 cm²]
- 18) In un triangolo isoscele il lato obliquo è $\frac{3}{2}$ della base e supera di 3 cm la base. Determinare il perimetro del triangolo.
[24 cm]
- 19) In un trapezio isoscele l'altezza misura 8 cm, l'area 160 cm² e la differenza delle basi è 12 cm. Determina la lunghezza delle basi.
[14 cm; 26 cm]
- 20) Sulla base AB di un rettangolo ABCD considera un punto E tale che l'area del trapezio AECD risulti $\frac{3}{2}$ dell'area del triangolo CEB. Sapendo che $\overline{AB} = 20\text{cm}$ e che $\overline{CB} = 9\text{cm}$, determina $\overline{EB}$.
[16 cm]
- 21) Calcola l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo ABC sapendo che la mediana AM relativa all'ipotenusa è $\frac{5}{6}$ del cateto AB e che la somma di questo e dell'ipotenusa è 64 cm.
[384 cm², 96 cm]

Nota importante

Finora abbiamo sempre considerato equazioni di primo grado, ma possiamo già risolvere anche equazioni di grado superiore utilizzando la *scomposizione in fattori* e la *legge di annullamento del prodotto*.

Vediamo alcuni esempi.

- 1) Consideriamo per esempio l'equazione (di secondo grado perché il massimo grado con cui compare l'incognita è 2) :

$$3x^2 - 24x = 0$$

Scomponiamo il primo membro mettendo in evidenza:

$$3x(x-8) = 0$$

Ricordiamo che per avere un prodotto uguale a zero almeno uno dei fattori deve essere uguale a zero e quindi in nostro caso le soluzioni dell'equazione si ottengono ponendo uguale a zero il fattore x e il fattore $x-8$, e quindi le soluzioni sono:

$$x = 0 \quad , x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$$

- 2) Vediamo un altro esempio: consideriamo l'equazione

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

In questo caso riconosciamo che si tratta dello sviluppo del quadrato di un binomio cioè possiamo scrivere:

$$(x-2)^2 = 0$$

Ma $(x-2)^2 = (x-2) \cdot (x-2)$ e quindi in questo caso abbiamo solo soluzione $x-2 = 0 \rightarrow x = 2$

- 3) Vediamo un ultimo esempio: consideriamo l'equazione

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

Possiamo fare un raccoglimento parziale:

$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0$$

Ma il fattore $x^2 - 4$ può essere ancora scomposto (è una differenza di quadrati) e quindi abbiamo

$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione data sono quindi $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$.

Esercizi
(equazioni di grado superiore al primo)

1) $x^4 - 1 = 0$ [$x = 1$, $x = -1$]

2) $x^2 - 5x + 6 = 0$ [$x = 2$, $x = 3$]

3) $x^2 - 4x = 0$ [$x = 0$, $x = 4$]

4) $3x - 2x^2 = 0$ [$x = 0$, $x = \frac{3}{2}$]

5) $x^2 - 25 = 0$ [$x = 5$, $x = -5$]

6) $x^3 - 2x^2 = 0$ [$x = 0$, $x = 2$]

7) $4 - 4x + x^2 = 0$ [$x = 2$]

8) $6x + 1 + 9x^2 = 0$ [$x = -\frac{1}{3}$]

9) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ [$x = 1$, $x = -1$, $x = 2$]

10) $x^2(x - 6) + 2(x - 3) + 9x = 0$ [$x = 1$, $x = 2$, $x = 3$]

Le equazioni numeriche fratte di 1° grado

Un'equazione si dice fratta se l'incognita compare in almeno un denominatore.

Occorre quindi considerare le condizioni di esistenza e la soluzione sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza.

Esempio

$$\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{1}{x-1}, \quad \text{C.E. } x \neq 1$$

$$\text{Sviluppiamo: } \frac{x+x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \rightarrow \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \rightarrow 2x-1=1 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$$

Ma $x=1$ **non è accettabile** e quindi l'equazione è impossibile.

Esempi

$$1) \quad \frac{x}{x-2} = \frac{1}{x-3} + 1, \quad \text{C.E. } x \neq 2, x \neq 3$$

$$\begin{aligned} \frac{x(x-3)}{(x-2)(x-3)} &= \frac{x-2+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \\ \cancel{x^2-3x} &= x-2 + \cancel{x^2-3x} - 2x+6 \\ 0 &= x-2-2x+6 \quad \Rightarrow \quad 0 = -x+4 \\ x &= 4 \quad \text{accettabile} \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{6}{x-5} + \frac{x}{5-x} = 1, \quad \text{C.E. } x \neq 5$$

$$\begin{aligned} -\frac{6}{5-x} + \frac{x}{5-x} &= 1 \\ \frac{-6+x}{5-x} &= \frac{5-x}{5-x} \\ -6+x &= 5-x \\ 2x &= 11 \\ x &= \frac{11}{2} \quad \text{accettabile} \end{aligned}$$

Esercizi
(equazioni numeriche fratte)

1) $\frac{x-1}{x+5} - 4 = 0$; $\frac{3x-9}{2x-6} = 0$ $[-7 ; \textit{impossibile}]$

2) $\frac{2(x-1)}{x+2} = 1$; $\frac{1}{4-x} - \frac{2x}{x-4} = 0$ $[4 ; -\frac{1}{2}]$

3) $\frac{3}{x+3} - \frac{2}{4-x} = 0$ $[\frac{6}{5}]$

4) $\frac{x^2}{x-3} - x - 1 = \frac{1}{2}$ $[-3]$

5) $\frac{x}{2x+2} + x + 1 = \frac{x^2}{x+1}$ $[-\frac{2}{5}]$

6) $x + \frac{4}{4-x} = \frac{x}{4-x} + x + 4$ $[\textit{impossibile}]$

7) $\frac{5}{2-2x} - \frac{x}{x^2-2x+1} = 0$ $[\frac{5}{7}]$

8) $\frac{x-1}{x^2+3x} + \frac{2}{x} + \frac{9}{2x+6} = 0$ $[-\frac{2}{3}]$

9) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{7}{x-1} = \frac{1}{x+1}$ $[-\frac{5}{3}]$

10) $\frac{6x+1}{x^2-4} - \frac{6}{x} = \frac{3}{x^3-4x}$ $[-21]$

11) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{2}{x^2+4x+3} = \frac{x+3}{x+1}$ $[-2]$

12) $\frac{2+2x^2}{x^3+1} + \frac{1-x^2}{x^2-x+1} + \frac{x}{x+1} = 0$ $[-\frac{3}{2}]$

13) $\frac{7x-10}{x^2+x-6} + \frac{6}{x-2} = \frac{5}{x+3}$ $[-\frac{9}{4}]$

$$14) \quad \frac{2}{x^2 - x} - \frac{4}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + x} \quad [impossibile]$$

$$15) \quad \frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{3}{x^2 + 2x} \quad [-4]$$

$$16) \quad \frac{x-1}{2x-6} + \frac{6}{x^2-9} - \frac{x}{2x+6} = 0 \quad \left[-\frac{9}{5}\right]$$

$$17) \quad \frac{1}{2x-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{x+5}{3x^2-12} \quad \left[\frac{20}{11}\right]$$

$$18) \quad \frac{2x}{x^2+6x+9} + \frac{1}{x+3} - \frac{3x-1}{x^2+3x} = 0 \quad \left[\frac{3}{5}\right]$$

$$19) \quad \frac{x+5}{2x-8} + \frac{x-2}{x} = \frac{3x+1}{2x} + \frac{x+1}{x(x-4)} \quad [-9]$$

$$20) \quad \frac{2x^2+1}{x^2-x-20} + 6x+2 = \frac{6x^2-26x-15}{x-5} \quad [7]$$

$$21) \quad \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{1}{2x-2} \quad [0]$$

$$22) \quad \frac{x}{x+4} - \frac{3x+4}{2(x-3)} = -\frac{7+4x}{8+2x} + \frac{3}{2} \quad \left[-\frac{1}{30}\right]$$

$$23) \quad \frac{3(4x+1)}{3x+2} - \frac{6x+2}{3x-1} = \frac{6x+4}{3x-1} - \frac{15}{9x+6} \quad [impossibile]$$

$$24) \quad \frac{4}{3x} + \frac{1}{3x+12} - \frac{x-1}{2x^2+8x} = 0 \quad [-5]$$

$$25) \quad \frac{3x}{x+2} + \frac{2x}{x-7} = \frac{5x+6}{x+2} \quad \left[-\frac{7}{2}\right]$$

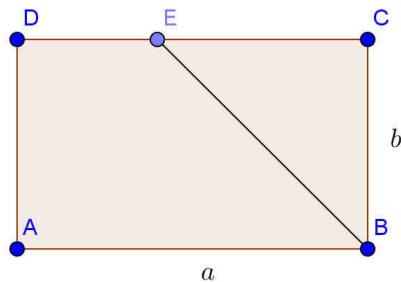
$$26) \quad \frac{2}{x^2+x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x} \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

Le equazioni letterali

Consideriamo il seguente problema: in un rettangolo ABCD le cui dimensioni misurano

$$\overline{AB} = a, \quad \overline{BC} = b$$

determina un punto E sul lato CD tale che il trapezio ABED abbia area doppia del triangolo BCE.



Se poniamo

$$\overline{DE} = x$$

$$\text{avremo che : } \frac{(a+x) \cdot b}{2} = 2 \cdot \frac{(a-x) \cdot b}{2}$$

Poiché in questa equazione, oltre alla lettera x che rappresenta l'incognita, compaiono altre lettere (che rappresentano numeri noti) l'equazione si chiama equazione letterale cioè *un'equazione si dice letterale se, oltre all'incognita, sono presenti altre lettere.*

Possiamo risolvere l'equazione sviluppando i calcoli:

$$ab + bx = 2ab - 2bx \quad \rightarrow \quad 3bx = ab \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{3} \quad (\text{poiché } b \neq 0 \text{ posso dividere per } b)$$

Vediamo altri esempi di equazioni letterali.

Esempio 1

$$ax - 3a = 2x$$

$$ax - 2x = 3a$$

$$x(a - 2) = 3a$$

Il coefficiente di x è $a-2$ e quindi si possono avere due casi

Se $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ avrò $0 \cdot x = 3 \cdot 2$ equazione impossibile

Se $a - 2 \neq 0$ cioè $a \neq 2$ posso dividere e ottengo $x = \frac{3a}{a-2}$

Esempio 2

$$ax + 4 = x + 4a^2$$

$$ax - x = 4a^2 - 4$$

$$x(a - 1) = 4(a^2 - 1)$$

Se $a - 1 = 0$ cioè $a = 1$ ottengo $0 \cdot x = 0$ equazione indeterminata

Se $a - 1 \neq 0$ cioè $a \neq 1$ ottengo $x = \frac{4(a-1)(a+1)}{a-1} \Rightarrow x = 4(a+1)$

Esercizi

(equazioni letterali)

1) $ax - 3a^2 = 0$ $[a \neq 0 \Rightarrow x = 3a; \quad a = 0 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

2) $ax = x + a$ $[a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{a}{a-1}; \quad a = 1 \Rightarrow eq. \quad imposs.]$

3) $b(x-1) + b + 1 = 0$ $[b \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{b}; \quad b = 0 \Rightarrow eq. \quad imposs.]$

4) $(a^2 - 3a)x = a(a^2 - 9)$ $[a \neq 0 \quad e \quad a \neq 3 \Rightarrow x = a + 3; \quad a = 0 \Rightarrow eq. \quad indet.$
 $a = 3 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

5) $2b(b-2)x = b^2 - 4b + 4$ $[b \neq 0 \quad e \quad b \neq 2 \Rightarrow x = \frac{b-2}{2b}; \quad b = 0 \Rightarrow eq. \quad imposs.$
 $b = 2 \Rightarrow eq. \quad indet.]$

6) $a(a-1)x = a^2 - 2a + 1$ $[a = 0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a = 1 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
 $a \neq 0,1 \Rightarrow x = \frac{a-1}{a}]$

7) $(a^2 - 2a)x = a^2 - 4$ $[a = 0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a = 2 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
 $a \neq 0,2 \Rightarrow x = \frac{a+2}{a}]$

8) $(a^3 - 1)x = 2a - 2$ $[a = 1 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a \neq 1 \Rightarrow x = \frac{2}{a^2 + a + 1}]$

9) $(a^2 + 2a + 1)x = a^2 - 1$ $[a = -1 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{a-1}{a+1}]$

10) $2a(x-1) = (a+2)x - 4$ $[a = 2 \Rightarrow equ. \quad indet.; \quad a \neq 2 \Rightarrow x = 2]$

11) $\frac{1}{2}b(2x-2) = 2bx + 2(b-3)$ $[b = 0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad b \neq 0 \Rightarrow x = \frac{3(2-b)}{b}]$

12) $b^2x + 2bx = 3b + 6$ $[b = 0 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad b = -2 \Rightarrow equ. \quad indet.;$
 $b \neq 0, -2 \Rightarrow x = \frac{3}{b}]$

13) $\frac{1}{3}x(2a-1) = ax - 2$ $[a = -1 \Rightarrow equ. \quad imposs.; \quad a \neq -1 \Rightarrow x = \frac{6}{a+1}]$

Problemi risolubili con equazioni fratte o letterali

- 1) Il rapporto fra la somma di tre numeri consecutivi e la differenza fra il primo numero e 5 è uguale a 9. Determina i tre numeri.

[8, 9, 10]

- 2) In un rettangolo la base è $\frac{4}{3}$ dell'altezza e il rapporto tra il perimetro e l'altezza aumentata di 4 cm è $\frac{14}{5}$. Calcola l'area del rettangolo.

[48 cm²]

- 3) In un rombo la somma delle diagonali è di 42 cm. Trova il perimetro e l'area del rombo sapendo che il rapporto della somma della diagonale maggiore con $\frac{2}{5}$ della minore e il doppio della maggiore è $\frac{13}{20}$.

[60 cm; 216 cm²]

- 4) Un rettangolo ha dimensioni a e b con $b > a$. La dimensione a viene aumentata di x e b viene diminuita di x . Come deve essere x in modo che l'area del rettangolo rimanga la stessa?

[$x = b - a$]

- 5) Il prezzo di un abito viene aumentato dell' $x\%$ e poi scontato dell' $x\%$. Qual è x se il prezzo dell'abito risulta alla fine scontato dell' 1% ?

(Suggerimento: indica con p il prezzo iniziale dell'abito....)

[$x\% = 10\%$]

- 6) In un trapezio isoscele la base minore CD è uguale al lato obliquo e la base maggiore $\overline{AB} = \frac{11}{5} \overline{CD}$. Sapendo che il rapporto tra l'area e il perimetro del trapezio risulta $\frac{16}{13}$, determina le misure dei lati del trapezio (lato obliquo e basi).

[$\overline{AD} = \overline{BC} = 5$, $\overline{DC} = 5$, $\overline{AB} = 11$]